UFR Sciences et Techniques de Besançon
Faculté de mathématiques
Unité Mini-Projet

Sous la direction de Monsieur Christian Le Merdy

Transformée de Hilbert

Clément Coine

Besançon, 2013 / 2014

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS

Pour $k \in \mathbb{Z}$, nous noterons e_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $e_k(t) = e^{ikt}$.

Nous désignerons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques, c'est-à-dire l'ensemble des sommes finies $\sum_n a_n e_n$, où, pour tout n, $a_n \in \mathbb{C}$.

Pour $1 \leq p < \infty$, nous noterons $L^p(\mathbb{T})$ l'ensemble des classes de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, $2\pi-$périodiques et de puissance $p-$ème intégrable sur $[-\pi, \pi]$. Pour $f \in L^p(\mathbb{T})$, on pose $\|f\|_p = \left(\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\right)^{1/p}$ qui est une norme sur $L^p(\mathbb{T})$ et en fait un espace de Banach.

Nous définissons de même $L^\infty(\mathbb{T})$ comme l'ensemble des classes de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, $2\pi-$périodiques et bornées essentiellement qu'on munit de la norme $\|.\|_\infty$ habituelle.

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, nous noterons $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f, qui est définie par la formule suivante :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi} \mathrm{d}x.$$

Si f et $\widehat{f}$ sont intégrables, la formule d'inversion donne alors :

$$\text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi x} \mathrm{d}\xi.$$

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, nous noterons $\widehat{f}$ la transformée de Fourier-Plancherel de f, qui est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$.

Enfin, nous noterons $\mathcal{S}$ l'espace de Schwartz sur $\mathbb{R}$.

CHAPITRE 1

NOTION DE MULTIPLICATEURS

1.1 Définitions

1.1.1 Sur $L^p(\mathbb{T})$

Définition 1.1.1. *Soient $p \in [1, +\infty[$ et $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de $\mathbb{C}$. On dit que a est un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{T})$ lorsque :*

$$\forall f \in L^p(\mathbb{T}), \exists g \in L^p(\mathbb{T}) \text{ telle que } \forall k \in \mathbb{Z},\ \widehat{g}(k) = a_k \widehat{f}(k).$$

Si a est un multiplicateur de Fourier, on peut alors définir une application linéaire

$$\begin{array}{rccc} T_a : & L^p(\mathbb{T}) & \longrightarrow & L^p(\mathbb{T}). \\ & f & \longmapsto & g \end{array} \tag{1.1}$$

Cette application est bien définie car l'application g de la définition (1.1.1) est unique, par injectivité des coefficients de Fourier.

On a alors la propriété suivante :

Proposition 1.1.1. *L'application linéaire T_a est continue.*

Démonstration. $L^p(\mathbb{T})$ étant un espace de Banach, on peut appliquer à T_a le théorème du graphe fermé pour montrer sa continuité. Soit $(f_n)_n \subset L^p(\mathbb{T})$, $f, g \in L^p(\mathbb{T})$ telles que

$$f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \ \text{ et } \ T_a(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g \ \text{ dans } L^p(\mathbb{T}).$$

Il s'agit alors de montrer que $g = T_a f$, ce qui revient à prouver que g et $T_a f$ ont les mêmes coefficients de Fourier. Soit alors $k \in \mathbb{Z}$. Puisque sur $L^p(\mathbb{T})$ on a $\|.\|_1 \leq \|.\|_p$, il vient

$$|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| \leq \|f_n - f\|_1 \leq \|f_n - f\|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\text{et } \ |\widehat{T_a(f_n)}(k) - \widehat{g}(k)| \leq \|T_a(f_n) - g\|_1 \leq \|T_a(f_n) - g\|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $\widehat{g}(k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \widehat{T_a(f_n)}(k) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_k \widehat{(f_n)}(k) = a_k \widehat{f}(k) = \widehat{T_a(f)}(k)$, ce qui prouve que $g = T_a f$. Le graphe de T_a est donc fermé et T_a est continue. ☐

On en déduit une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{C}$ soit un multiplicateur de Fourier.

Lemme 1.1.1. *a est un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{T})$ si et seulement si*

$$\exists C > 0,\ \forall f \in \mathcal{P},\ \|\sum_k a_k \widehat{f}(k) e_k\|_p \leq C\|f\|_p. \tag{1.2}$$

Démonstration. Si a est un multiplicateur de Fourier, la propriété (1.2) est satisfaite avec $C = \|T_a\|$. Réciproquement, si la propriété (1.2) est vérifiée, on peut définir sur $\mathcal{P}$ une application linéaire continue T, à valeurs dans $L^p(\mathbb{T})$, telle que $T = (T_a)_{|\mathcal{P}}$. On prolonge ensuite T à $\overline{\mathcal{P}}^{\|\cdot\|_p} = L^p(\mathbb{T})$ et on note encore T le prolongement obtenu. Montrons que, pour $f \in L^p(\mathbb{T})$, l'élément $T(f) \in L^p(\mathbb{T})$ satisfait : $\forall k \in \mathbb{Z}, \widehat{T(f)}(k) = a_k \widehat{f}(k)$.
Soit $(f_n)_n \subset \mathcal{P}$ une suite qui converge vers f et $k \in \mathbb{Z}$. Alors $(T(f_n))_n$ converge vers $T(f)$ et on a, comme dans la démonstration de la proposition précédente :

$$\widehat{T(f)}(k) = \lim_{n\to+\infty} \widehat{T(f_n)}(k) = \lim_{n\to+\infty} a_k \widehat{(f_n)}(k) = a_k \widehat{f}(k).$$

Ainsi, a est bien un multiplicateur de Fourier. □

Remarque 1.1.1. *Si $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de Fourier, a est borné : en effet, on remarque que pour $k \in \mathbb{Z}$ on a $|a_k| \leq \|a_k e_k\|_p \leq \|T_a\|\|e_k\|_p = \|T_a\|$.*

Donnons maintenant quelques exemples de multiplicateurs :

Exemple : Sur $L^2(\mathbb{T})$ toute suite bornée est un multiplicateur de Fourier.
En effet, soit $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite bornée et $f \in \mathcal{P}$. L'égalité de Parseval donne :

$$\left\|\sum_k a_k \widehat{f}(k) e_k\right\|_2^2 \leq \sum_k |a_k|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq \|a\|^2_{l^\infty_\mathbb{Z}} \sum_k |\widehat{f}(k)|^2 = \|a\|^2_{l^\infty_\mathbb{Z}} \|f\|_2^2$$

et on conclut par le lemme (1.1.1).

On verra dans la dernière section de ce chapitre que cet exemple n'est valable que sur $L^2(\mathbb{T})$.

Exemple : Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, la suite $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur sur $L^p(\mathbb{T}), 1 \leq p < +\infty$.
En effet, si $g \in L^p(\mathbb{T})$, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$ l'égalité $\widehat{f \star g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$. De plus, l'inégalité de Young donne $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p < +\infty$, de sorte que $f \star g \in L^p(\mathbb{T})$. D'où le résultat par définition d'un multiplicateur.

1.1.2 Sur $L^p(\mathbb{R})$

Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ et soit $T_\varphi : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \widehat{T_\varphi(f)} = \varphi \widehat{f}.$$

Définition 1.1.2. *Soit $p \in [1, +\infty[$. On dit que φ est un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{R})$ lorsque :*

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}),\ \|T_\varphi(f)\|_p \leq C\|f\|_p.$$

Ceci équivaut à l'existence d'une application linéaire continue $S : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$ telle que S et T_φ coïncident sur $L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$.

Exemple : Grâce au théorème de Fourier-Plancherel, on peut voir que tout élément de $L^\infty(\mathbb{R})$ est un multiplicateur de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$.

1.2 Multiplicateurs sur $L^1(\mathbb{T})$ et théorème du transfert

Dans cette partie, on va décrire les multiplicateurs de Fourier sur $L^1(\mathbb{T})$ en démontrant que ceux-ci s'identifient aux mesures de Borel complexes et régulières sur $\mathbb{T}$. On verra ensuite comment construire un multiplicateur sur $L^p(\mathbb{T})$ à partir d'un multiplicateur sur $L^p(\mathbb{R})$.

Commençons par rappeler quelques propriétés du noyau de Poisson. Pour $0 \leq r < 1$ et $t \in \mathbb{R}$ posons :

$$P_r(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int}.$$

Puisque $0 \leq r < 1$, cette somme est bien définie car normalement convergente. De plus on a :

$$\begin{aligned} P_r(t) = \sum_{n\geq 0} r^n e^{int} + \sum_{n\leq -1} r^{-n} e^{int} = \frac{1}{1-re^{it}} + re^{-it}\sum_{k\geq 0} r^k e^{ikt} &= \frac{1}{1-re^{it}} + re^{-it}\frac{1}{1-re^{-it}} \\ &= \frac{1-re^{-it}+re^{it}(1-re^{it})}{(1-re^{it})(1-r^{-it})} \\ &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}. \end{aligned}$$

En particulier, $P_r \geq 0$ donc on a,

$$\begin{aligned} \|P_r\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \quad \text{par convergence normale} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Théorème 1.2.1. *$a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de Fourier sur $L^1(\mathbb{T})$ si et seulement si il existe une mesure de Borel complexe et régulière μ sur $\mathbb{T}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\widehat{\mu}(k) = a_k$.*

Démonstration. - Supposons qu'il existe une telle mesure μ sur $\mathbb{T}$ vérifiant $\widehat{\mu}(k) = a_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Soit $P \in \mathcal{P}$. Alors $\sum_k a_k \widehat{P}(k) e_k = P \star \mu$ et par l'inégalité de Young on a :

$$\|\sum_k a_k \widehat{P}(k) e_k\|_1 = \|P \star \mu\|_1 \leq \|P\|_1 |\mu|,$$

ce qui prouve, d'après le lemme (1.1.1), que a est un multiplicateur de Fourier sur $L^1(\mathbb{T})$.
- Réciproquement, supposons que a est un multiplicateur de Fourier sur $L^1(\mathbb{T})$. Définissons, pour $0 < r < 1$, l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi_r : & \mathcal{C}(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \longmapsto & \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(-n) a_n r^{|n|} \end{array}.$$

Notons, pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, $f_-(t) = f(-t)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}, \widehat{f_-}(n) = \widehat{f}(-n)$. On en déduit que $\varphi_r(f) = (f_- \star T_a P_r)(0)$ et donc

$$\varphi_r(f)| \leq \|f_-\|_\infty \|T_a P_r\|_1 \leq \|f\|_\infty \|T_a : L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})\|$$

car $\|P_r\|_1 = 1$. Ainsi, $\|\varphi_r\| \leq \|T_a\|$ donc la suite généralisée $(\varphi_r)_{0<r<1} \subset (\mathcal{C}(\mathbb{T})^*, w^*)$ est bornée. Par le théorème de Banach-Alaoglu, on en déduit que $(\varphi_r)_{0<r<1}$ admet un point d'accumulation φ. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une mesure de Borel complexe et régulière μ qui représente la forme linéaire φ. Puisque pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi_r(e_{-k}) = a_k r^{|k|} \underset{r \to 1}{\longrightarrow} a_k,$$

on en déduit que $\varphi(e_{-k}) = a_k$. Or, $\varphi(e_{-k}) = \widehat{\mu}(k)$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Théorème 1.2.2. *Soit $1 < p < \infty$. Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{R})$. On suppose φ continue aux points $m/2\pi, m \in \mathbb{Z}$, et on pose $\lambda(n) = \varphi(m/2\pi)$. Alors la suite $a := (\lambda(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{T})$ et $\|T_a\| \leq \|T_\varphi\|$.*

Pour démontrer ce théorème, on a besoin de deux lemmes. Ceux-ci s'appuient sur l'égalité suivante, qui donne la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne.

$$\forall \alpha > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-2i\pi t x} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi^2 t^2/\alpha}.$$

En faisant le changement de variables $u = -2\pi x$ puis en remplaçant α par $4\pi^2\alpha$ on obtient l'égalité :

$$\forall \alpha > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha u^2} e^{itu} \mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-t^2/4\alpha}. \tag{1.3}$$

Lemme 1.2.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $2\pi-$périodique. Alors*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sqrt{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\epsilon x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \ \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}. \tag{1.4}$$

Démonstration. Si $f(x) = e^{imx}, m \in \mathbb{N}$, la formule (1.3) donne, pour $\epsilon > 0$,

$$\sqrt{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\epsilon x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} e^{-m^2/4\epsilon}.$$

Ainsi, si $m \neq 0$, $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \sqrt{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\epsilon x^2} \mathrm{d}x = 0$ et si $m = 0$, $\sqrt{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\epsilon x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ pour tout $\epsilon > 0$. Or, l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \ \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$ est nulle si $m \neq 0$ et vaut 1 sinon, ce qui prouve l'égalité (1.2) dans ce cas. Par linéarité, celle-ci est vérifiée lorsque f est un polynôme trigonométrique. Pour f continue et $2\pi-$périodique, il existe une suite $(Q_n)_n \subset \mathcal{P}$ qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire on a alors :

$$\begin{aligned}
&\left|\sqrt{\epsilon}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\epsilon x^2}\mathrm{d}x - \sqrt{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\right| \\
&\leq \sqrt{\epsilon}\int_{\mathbb{R}} |f(x)-Q_n(x)|e^{-\epsilon x^2}\mathrm{d}x + \left|\int_{\mathbb{R}} Q_n(x)e^{-\epsilon x^2}\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x)\ \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\right| + \sqrt{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Q_n(x)-f(x)|\ \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \\
&\leq \|f-Q_n\|_\infty \underbrace{\sqrt{\epsilon}\int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon x^2}\mathrm{d}x}_{=\sqrt{\pi}} + \left|\int_{\mathbb{R}} Q_n(x)e^{-\epsilon x^2}\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x)\ \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\right| + \sqrt{\pi}\|f-Q_n\|_\infty \\
&= 2\sqrt{\pi}\|f-Q_n\|_\infty + \left|\int_{\mathbb{R}} Q_n(x)e^{-\epsilon x^2}\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x)\ \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\right|.
\end{aligned}$$

En choisissant n suffisamment grand puis ϵ proche de 0, cette dernière quantité peut être rendue aussi petite que l'on veut. D'où le résultat. $\square$

Lemme 1.2.2. *Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. Posons, pour $\delta > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, $w_\delta(y) = e^{-\delta y^2}$. Alors pour tous $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$,*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sqrt{\epsilon}\int_{\mathbb{R}} T(Pw_{\epsilon\alpha})(x)\overline{Q(x)}w_{\epsilon\beta}(x)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_a P(x)\overline{Q(x)}\ \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}. \tag{1.5}$$

Démonstration. Puisque les deux membres de (1.5) sont linéaires en P et Q, il suffit de prouver l'égalité lorsque $P = e_n$ et $Q = e_m$, où $n, m \in \mathbb{Z}$. D'après le théorème de Fourier-Plancherel, et par définition de T, l'intégrale du membre de gauche, qu'on notera I_ϵ, est égale à $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\phi(x)\overline{\psi(x)}\mathrm{d}x$ où ϕ et ψ sont les transformées de Fourier de $Pw_{\epsilon\alpha}$ et $Qw_{\epsilon\beta}$. Mais, par l'égalité (1.3), on a

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} P(u)w_{\epsilon\alpha}(u)e^{-2i\pi xu}\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon\alpha u^2}e^{i(n-2\pi x)u}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon\alpha}}\ e^{(n-2\pi x)^2/4\epsilon\alpha}.$$

De même, on trouve $\psi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon\beta}}\ e^{(m-2\pi x)^2/4\epsilon\beta}$.

- Supposons $n \neq m$. On a alors $|n-m| \geq 1$, et par ce qui précède,

$$|I_\epsilon| \leq \pi\|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(n-2\pi x)^2/4\epsilon\alpha}}{\sqrt{\epsilon\alpha}}\frac{e^{-(m-2\pi x)^2/4\epsilon\beta}}{\sqrt{\epsilon\beta}}\mathrm{d}x = \frac{\|\varphi\|_\infty}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(n-u)^2/4\epsilon\alpha}}{\sqrt{\epsilon\alpha}}\frac{e^{-(m-u)^2/4\epsilon\beta}}{\sqrt{\epsilon\beta}}\mathrm{d}u$$

grâce au changement de variables $u = 2\pi x$. En posant $\Psi(x) = \phi\left(\frac{x}{2\pi}\right)\psi\left(\frac{x}{2\pi}\right)$, on a alors

$$\sqrt{\epsilon}|I_\epsilon| \leq \sqrt{\epsilon}\frac{\|\varphi\|_\infty}{2}\left(\int_{|n-u|\geq\frac{1}{2}} \Psi(u)\mathrm{d}u + \int_{|m-u|\geq\frac{1}{2}} \Psi(u)\mathrm{d}u\right).$$

Estimons la première intégrale. Si $|n-u| \geq \frac{1}{2}$, on a $\phi\left(\frac{u}{2\pi}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon\alpha}}e^{(n-u)^2/4\epsilon\alpha} \leq \frac{e^{-1/16\epsilon\alpha}}{\sqrt{\epsilon\alpha}}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\epsilon}\int_{|n-u|\geq\frac{1}{2}} \Psi(u)\mathrm{d}u \leq \sqrt{\epsilon}\ \frac{e^{-1/16\epsilon\alpha}}{\sqrt{\epsilon\alpha}}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(m-u)^2/4\epsilon\beta}}{\sqrt{\epsilon\beta}}\mathrm{d}u &= \frac{e^{-1/16\epsilon\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-y^2/4\epsilon\beta}}{\sqrt{\epsilon\beta}}\mathrm{d}y \\
&= 2\sqrt{\pi}e^{-1/16\epsilon\alpha} \quad \text{par (1.3) avec } t = 0 \\
&\underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

On montre de même que $\lim_{\epsilon \to 0} \sqrt{\epsilon} \int_{|m-u| \geq \frac{1}{2}} \Psi(u) \mathrm{d}u = 0$. Ainsi, $\lim_{\epsilon \to 0} \sqrt{\epsilon} |I_\epsilon| = 0$.
D'autre part, le membre de droite dans (1.5) est égal à $\sqrt{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(n) e^{i(n-m)x} \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = 0$.
L'égalité (1.5) est donc vérifiée lorsque $n \neq m$.

- Supposons maintenant que $n = m$. Puisque $\alpha + \beta = 1$, on a $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sqrt{\epsilon} I_\epsilon = \sqrt{\epsilon} \frac{\pi}{\epsilon\sqrt{\alpha\beta}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-(n-2\pi x)^2(1/4\epsilon\alpha + 1/4\epsilon\beta)} \mathrm{d}x &= \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon\alpha\beta}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{(n-2\pi x)^2/4\epsilon\alpha\beta} \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{n}{2\pi} - \frac{\sqrt{\epsilon\alpha\beta}}{\pi} u\right) e^{-u^2} \mathrm{d}u\end{aligned}$$

grâce au changement de variables $u = \frac{m - 2\pi x}{2\sqrt{\epsilon\alpha\beta}}$. Par continuité de φ en $\frac{n}{2\pi}$ et par le théorème de convergence dominée (qui s'applique puisque φ est bornée), le dernier membre de l'égalité précédente a pour limite $\varphi\left(\frac{n}{2\pi}\right) \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \mathrm{d}u = \sqrt{\pi} \lambda(n)$ lorsque ϵ tend vers 0.
Le membre de droite de (1.5) étant égal à $\sqrt{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(n) \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \sqrt{\pi} \lambda(n)$, on a l'égalité souhaitée. □

On peut maintenant démontrer le théorème (1.2.2).

Démonstration. Soit q l'exposant conjugué de p. Posons $\alpha = \frac{1}{p}$ et $\beta = \frac{1}{q}$. Si $P, Q \in \mathcal{P}$ on a :

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}} T(P w_{\epsilon\alpha}(x) \overline{Q(x)} w_{\epsilon\beta}(x) \mathrm{d}x \right| \leq \|T(P w_{\epsilon\alpha})\|_p \|Q w_{\epsilon\beta}\|_q &\leq \|T_\varphi\| \|P w_{\epsilon\alpha}\|_p \|Q w_{\epsilon\beta}\|_q \\ &= \|T_\varphi\| \|P w_{\epsilon/p}\|_p \|Q w_{\epsilon/q}\|_q,\end{aligned}$$

où les normes sont prises sur $\mathbb{R}$. Multiplions cette inégalité par $\sqrt{\epsilon}$ puis faisons tendre ϵ vers 0. Par le lemme (1.2.2), le membre de gauche converge vers $\sqrt{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} T_a P(x) \overline{Q(x)} \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \right|$. Pour le membre de droite, on applique le lemme (1.2.1), ce qui donne :

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \to 0} \sqrt{\epsilon} \|P w_{\epsilon/p}\|_p \|Q w_{\epsilon/q}\|_q &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\sqrt{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} |P(x)|^p e^{-\epsilon x^2} \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\sqrt{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} |Q(x)|^q e^{-\epsilon x^2} \mathrm{d}x \right)^{1/q} \\ &= \left(\sqrt{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P(x)|^p \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \right)^{1/p} \left(\sqrt{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Q(x)|^q \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \right)^{1/q} \\ &= \sqrt{\pi} \|P\|_p \|Q\|_q,\end{aligned}$$

où les normes sont cette fois-ci prises sur $[-\pi, \pi]$.
Ainsi, $\left| \int_{-\pi}^{\pi} T_a P(x) \overline{Q(x)} \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \right| \leq \|T_\varphi\| \|P\|_p \|Q\|_q$, et en prenant la borne supérieure sur tous les éléments $Q \in \mathcal{P}$ tels que $\|Q\|_q \leq 1$, on obtient $\|T_a P\| \leq \|T_\varphi\| \|P\|_p$. Ceci prouve, d'après le lemme (1.1.1), que a est un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{T})$.

□

1.3 Contre-exemples non explicites sur $L^p, p \neq 2$

Dans cette section, on va démontrer que lorsque $1 \leq p < \infty, p \neq 2$, il existe une suite bornée de $\mathbb{C}$ qui n'est pas un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{T})$. Le point clé sera les inégalités de Khintchine dont on va rappeler l'énoncé.

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(\mathcal{E}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires de Rademacher (ie $\mathbb{P}(\mathcal{E}_k = 1) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_k = -1) = \frac{1}{2}$) indépendantes. On a alors le résultat suivant :

Théorème 1.3.1. *Pour tout $1 \leq p < \infty$, il existe $A_p, B_p > 0$ tels que pour tout $n \geq 1$, pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$,*

$$A_p \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathcal{E}_k \right\|_{L^p(\Omega)} \leq B_p \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit maintenant $1 \leq p < \infty, p \neq 2$ fixé. On va raisonner par l'absurde en supposant que toute suite bornée de $\mathbb{C}$ est un multiplicateur. A l'aide des inégalités précédentes, on va aboutir à une contradiction en montrant que les normes $\|.\|_2$ et $\|.\|_p$ sont équivalentes sur $\mathcal{P}$.

Lemme 1.3.1. *Supposons que toute suite bornée de $\mathbb{C}$ est un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{T})$. Alors il existe $K > 0$ tel que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, pour tous $c_{-n}, \cdots, c_0, \cdots, c_m = \pm 1$, et pour tous $a_{-n}, \cdots, a_0, \cdots, a_m \in \mathbb{C}$,*

$$\left\| \sum_{k=-n}^{m} c_k a_k e^{ikt} \right\|_p \leq K \left\| \sum_{k=-n}^{m} a_k e^{ikt} \right\|_p.$$

Démonstration. Puisque par hypothèse tout élément de $l^\infty_\mathbb{Z}$ est un multiplicateur de Fourier, on peut définir l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rccc} m: & l^\infty_\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{B}(L^p(\mathbb{T})). \\ & a & \longmapsto & T_a \end{array}$$

Montrons, à l'aide du théorème du graphe fermé, que m est continue. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset l^\infty_\mathbb{Z}$ telle que $(a_n, Ta_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (a, T)$, et montrons que $T = T_a$. Il suffit pour cela de vérifier cette égalité sur la partie dense $\mathcal{P}$ de $L^p(\mathbb{T})$, ou encore, par linéarité, sur les $e_k, k \in \mathbb{Z}$.
Si $k \in \mathbb{Z}$, désignons par x^k la $k-$ème composante d'une suite $x \in l^\infty_\mathbb{Z}$. On a alors $T_{a_n} e_k = a_n^k e_k$ et $T_a e_k = a^k e_k$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \|Te_k - T_a e_k\|_p \leq \|Te_k - T_{a_n} e_k\|_p + \|T_{a_n} e_k - T_a e_k\|_p &\leq \|T - T_{a_n}\| \|e_k\|_p + \|a_n^k e_k - a^k e_k\|_p \\ &\leq \|T - T_{a_n}\| + |a_n^k - a^k| \\ &\leq \|T - T_{a_n}\| + \|a_n - a\|_\infty \end{aligned}$$

ce qui tend par hypothèse vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Ainsi, m est continue donc il existe $K > 0$ tel que $\forall a \in l^\infty_\mathbb{Z}$, $\|T_a\| \leq K\|a\|_\infty$. En appliquant cette inégalité à des éléments de $\mathcal{P}$ et avec des suites dont les coefficients sont ± 1 (et donc de norme 1), on obtient l'inégalité souhaitée. $\square$

Théorème 1.3.2. *Il existe des suites bornées de $\mathbb{C}$ qui ne sont pas des multiplicateurs de Fourier sur $L^p(\mathbb{T})$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant que toute suite bornée est un multiplicateur. Soit $P = \sum_k a_k e_k \in \mathcal{P}$. En appliquant le lemme précédent avec $c_k = \mathcal{E}_k(\omega)$ où $\omega \in \Omega$ est fixé on obtient :

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_k \mathcal{E}_k(\omega) a_k e_k(t) \right|^p \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \leq K^p \|P\|_p^p.$$

En intégrant cette inégalité sur Ω (ce qui laisse inchangé le membre de droite) et en intervertissant les intégrales on obtient :

$$\int_0^{2\pi} \left\| \sum_k \mathcal{E}_k a_k e_k(t) \right\|_{L^p(\Omega)}^p \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \leq K^p \|P\|_p^p.$$

Par les inégalités de Khintchine, on a $\| \sum_k \mathcal{E}_k a_k e_k(t) \|_{L^p(\Omega)} \geq A_p \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = A_p \|P\|_2$, ce qui donne l'inégalité :

$$\|P\|_2 \leq \frac{K}{A_p} \|P\|_p. \tag{1.6}$$

Soit $\omega \in \Omega$ fixé. On applique cette fois-ci le lemme précédent avec $c_k = \mathcal{E}_k(\omega)$ et en remplaçant a_k par $\mathcal{E}_k(\omega) a_k$. Compte-tenu du fait que $\mathcal{E}_k(\omega)^2 = 1$ on obtient :

$$\|P\|_p^p \leq K^p \int_0^{2\pi} \left| \sum_k \mathcal{E}_k(\omega) a_k e_k(t) \right|^p \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}.$$

En procédant comme ci-dessus et en utilisant les inégalités de Khintchine, on obtient :

$$\frac{1}{KB_p} \|P\|_p \leq \|P\|_2. \tag{1.7}$$

Les inégalités (1.6) et (1.7) montrent alors que les normes $\|.\|_2$ et $\|.\|_p$ sont équivalentes sur $\mathcal{P}$, ce qui est faux puisque $p \neq 2$. On en déduit qu'il existe bien des suites bornées de $\mathbb{C}$ qui ne sont pas des multiplicateurs de Fourier sur $L^p(\mathbb{T})$. □

Grâce au théorème du transfert, on peut en déduire un résultat similaire sur $L^p(\mathbb{R})$.

Théorème 1.3.3. *Soit $1 < p \neq 2 < \infty$. Il existe des éléments $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ qui ne sont pas des multiplicateurs de Fourier sur $L^p(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Supposons que tout élément $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ est un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{R})$. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de complexes bornée. Alors il existe une fonction continue et bornée φ telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi(k/2\pi) = a_k$ (on peut construire φ affine par morceaux). φ est alors un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{R})$ donc par le théorème du transfert (1.2.2), a est un multiplicateur sur $L^p(\mathbb{T})$. Ceci étant vrai pour toute suite a bornée, on obtient une contradiction grâce au théorème précédent. □

Dans les cas $p = 1$ et $p = \infty$, un contre-exemple explicite sera donnée au chapitre 3 avec la transformée de Hilbert.

CHAPITRE 2

INTERPOLATION DE MARCINKIEWICZ

Dans cette partie, on établit différents résultats utiles pour le chapitre suivant. On y introduit la notion d'opérateur de type faible, de type fort et d'opérateur maximal associé à une famille d'opérateurs. On verra notamment quelle conséquence on peut déduire sur une famille d'opérateurs lorsque l'opérateur maximal associé est de type faible. On démontra également le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz, qui permet de prouver qu'un opérateur est borné à partir d'inégalités faibles. Celui-ci sera constamment utilisé par la suite, en particulier dans la dernière section où l'on étudiera la fonction maximale de Hardy-Littlewood associée à une fonction localement intégrable.

2.1 Opérateur maximal et convergence presque partout

On considère (X, μ) et (Y, ν) deux espaces mesurés.

Définition 2.1.1. *Soit* $T : L^p(X, \mu) \longrightarrow \mathcal{M}(Y, \mathbb{C}) := \{f : Y \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable}\}$ *une application.*
- On dit que T *est de type faible* (p, q), $q < +\infty$ *si :*

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

et on dit que T *est de type faible* (p, ∞) *si* T *est bornée de* $L^p(X, \mu)$ *dans* $L^\infty(Y, \nu)$.

- On dit que T *est de type fort* (p, q) *si* T *est borné de* $L^p(X, \mu)$ *dans* $L^q(Y, \nu)$.

Remarque 2.1.1. *Si* T *est de type fort* (p, q), T *est de type faible* (p, q).
En effet, si on l'on pose $E_\lambda = \{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}$, *on a :*

$$\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} \mathrm{d}\mu \leq \int_{E_\lambda} \left|\frac{Tf(x)}{\lambda}\right|^q \mathrm{d}\mu(x) \leq \frac{\|Tf\|_q^q}{\lambda^q} \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q.$$

Définition 2.1.2. *Soit* I *un sous-ensemble dénombrable de* $\mathbb{R}$ *et* $\{T_t\}_{t\in I}$ *une famille d'opérateurs définis sur* $L^p(X, \mu)$ *et à valeurs dans* $L^p(X, \mu)$. *Définissons*

$$T^* f(x) = \sup_t |T_t f(x)|.$$

T^* *est appelé opérateur maximal associé à la famille* $\{T_t\}_t$.

L'introduction de l'opérateur maximal est justifiée par le théorème suivant :

Théorème 2.1.1. *On suppose ici que $p, q < +\infty$. Soit $t_0 \in \overline{I}$ et T un opérateur de type faible (p, p) sur $L^p(X, \mu)$, à valeurs dans $\mathcal{M}(X, \mathbb{C})$. Si T^* est de type faible (p, q) alors l'ensemble*

$$\left\{ f \in L^p(X, \mu) : \lim_{t \to t_0} T_t f(x) = T f(x) \text{ pp} \right\}$$

est fermé dans $L^p(X, \mu)$.

Démonstration. Soit $f \in L^p(X, \mu)$, $(f_n)_n \subset L^p(X, \mu)$ une suite qui converge vers f et telle que, pour tout n, $\lim_{t \to t_0} T_t f_n(x) = T f_n(x)$ pp. Montrons alors que $\lim_{t \to t_0} T_t f(x) = T f(x)$ pp. Quitte à travailler séparément avec les parties réelle et imaginaire, on peut supposer que, pour tout t et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_t f(x)$ et $T_t f_n(x)$ sont réels.
Puisque pour tout n, $|T f_n(x)| < +\infty$ pp, on peut supposer, quitte à changer les $T f_n$ sur un ensemble de mesure nulle, que pour tout n et pour tout $x \in X$, $|T f_n(x)| < +\infty$.
Posons, pour $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$E_\lambda = \left\{ x \in X : \limsup_{t \to t_0} |T_t f(x) - T f(x)| > \lambda \right\}$$

$$\text{et} \quad E_\lambda^n = \left\{ x \in X : \limsup_{t \to t_0} |T_t (f - f_n)(x) - T(f - f_n)(x)| > \lambda \right\}.$$

On a $|T_t (f - f_n)(x) - T(f - f_n)(x)| \geq |T_t f(x) - T f(x)| - |T_t f_n(x) - T f_n(x)|$ donc par passage à la limite supérieure, on a pour presque tout x,

$$\limsup_{t \to t_0} |T_t (f - f_n)(x) - T(f - f_n)(x)| \geq \limsup_{t \to t_0} |T_t f(x) - T f(x)|.$$

On en déduit que, pour tout n, $E_\lambda \subset E_\lambda^n$ et en particulier que $\mu(E_\lambda) \leq \mu(E_\lambda^n)$. De plus,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \to t_0} |T_t (f - f_n)(x) - T(f - f_n)(x)| &\leq \limsup_{t \to t_0} |T_t (f - f_n)(x)| + |T(f - f_n)(x)| \\ &\leq T^*(f - f_n)(x) + |T(f - f_n)(x)| \end{aligned}$$

de sorte que $E_\lambda^n \subset \left\{ x \in X : T^*(f - f_n)(x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \cup \left\{ x \in X : |T(f - f_n)(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\}$.
On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mu(E_\lambda) \leq \mu(E_\lambda^n) &\leq \mu\left(\left\{ x \in X : T^*(f - f_n)(x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) + \mu\left(\left\{ x \in X : |T(f - f_n)(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) \\ &\leq \left(\frac{2C}{\lambda} \|f - f_n\|_p \right)^q + \left(\frac{2C'}{\lambda} \|f - f_n\|_p \right)^p, \end{aligned}$$

et le dernier membre de cette inégalité tend vers 0 par hypothèse. Ainsi $\mu(E_\lambda) = 0$.
Finalement, $\mu\left(\left\{ x \in X : \limsup_{t \to t_0} |T_t f(x) - T f(x)| > 0 \right\} \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(E_{1/k}) = 0$, ce qui achève la démonstration.

□

2.2 Interpolation de Marcinkiewicz

Définition 2.2.1. *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une application mesurable. L'application*

$$\begin{array}{rrcl} a_f : & [0,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[. \\ & \lambda & \longmapsto & \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}\right) \end{array}$$

est appelée fonction de distribution de f (associée à μ).

Proposition 2.2.1. *Soit $\phi : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et telle que $\phi(0) = 0$. Alors*

$$\int_X \phi(|f(x)|)\ \mathrm{d}\mu(x) = \int_0^{+\infty} \phi'(x) a_f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Démonstration. Puisque $\phi(0) = 0$ on a $\displaystyle\int_0^{|f(x)|} \phi'(t)\ \mathrm{d}t = \phi(|f(x)|)$. Les fonctions en présence étant positives on a, par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_X \phi(|f(x)|)\ \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \left(\int_0^{|f(x)|} \phi'(t)\ \mathrm{d}t \right)\ \mathrm{d}\mu(x) &= \int_0^{+\infty} \phi'(t) \left(\int_{\{t<|f(x)|\}} \mathrm{d}\mu(x) \right)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \phi'(x) a_f(x)\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

□

En appliquant cette proposition à la fonction $\phi(\lambda) = \lambda^p$ on obtient

$$\|f\|_p^p = p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} a_f(\lambda)\ \mathrm{d}\lambda. \tag{2.1}$$

Cette égalité va nous permettre de déduire des inégalités fortes à partir d'inégalités faibles.

Définition 2.2.2. *Soit T une application définie sur un espace vectoriel de fonctions mesurables et à valeurs dans un espace de fonctions mesurables. On dit que T est sous-linéaire si :*

$$|T(f_0 + f_1)| \leq |Tf_0| + |Tf_1|$$

$$\text{et} \quad |T(\lambda f)| = |\lambda||Tf|, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Remarque 2.2.1. *- Si T est un opérateur entre deux espaces vectoriels de fonctions mesurables, T est sous-linéaire.*
- L'intérêt de la définition précédente vient du fait que si $\{T_t\}_t$ est une famille d'opérateurs, l'opérateur maximal associé n'est en général pas linéaire mais il est cependant sous-linéaire.

Théorème 2.2.1 (Interpolation de Marcinkiewicz)**.** *Soient $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ et soit T une application sous-linéaire de $L^{p_0}(X,\mu) + L^{p_1}(X,\mu)$ dans l'ensemble des fonctions mesurables sur Y.*
Si T est de type faible (p_0, p_0) et de type faible (p_1, p_1) alors T est de type fort (p,p) pour $p_0 < p < p_1$.

Démonstration. Soit $f \in L^p(X\mu)$ où $p_0 < p < p_1$.
On va majorer $\|Tf\|_p$ à l'aide de la formule (2.1). On procède en deux étapes :

- **Première étape** : Majoration de $a_{T_f}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$.
Fixons c et λ deux réels strictement positifs . La constante c sera choisie ultérieurement pour simplifier la borne obtenue, soit pour $a_{T_f}(\lambda)$, soit pour $\|T\|_{L^p \to L^p}$.
Décomposons f en $f = f_0 + f_1$ où

$$f_0 = f\chi_{\{x\,:\,|f(x)|>c\lambda\}},\ f_1 = f\chi_{\{x\,:\,|f(x)|\le c\lambda\}}.$$

Puisque $f \in L^p$ on a $\mu(\{x : |f(x)| > c\lambda\}) < \infty$ et $f_0 \in L^p$. Or, $p_0 < p$ donc $f_0 \in L^{p_0}$ par inclusion décroissante des espaces L^q en mesure finie.
De plus, puisque $f_1 \in L^p \cap L^\infty$ et que $p < p_1 \le \infty$, on a $f_1 \in L^{p_1}$.

T étant sous-linéaire, on a pour presque tout x,

$$|Tf(x)| = |T(f_0 + f_1)(x)| \le |Tf_0(x)| + |Tf_1(x)|$$

de sorte que

$$a_{T_f}(\lambda) \le a_{T_{f_0}}\left(\frac{\lambda}{2}\right) + a_{T_{f_1}}\left(\frac{\lambda}{2}\right). \tag{2.2}$$

Distinguons maintenant deux cas :
• Si $p_1 = \infty$: on pose $c = \dfrac{1}{2A_1}$ où A_1 est tel que $\|Tg\|_\infty \le A_1\|g\|_\infty$.
Alors $a_{T_{f_1}}(\frac{\lambda}{2}) = \mu\left(\left\{x \in X : |Tf_1(x)| > \dfrac{\lambda}{2}\right\}\right) = 0$ car on a, pour presque tout x,

$$|Tf_1(x)| \le \|Tf_1\|_\infty \le A_1\|f_1\|_\infty \le A_1 c\lambda = \frac{\lambda}{2}.$$

De plus, T étant de type faible (p_0, p_0), il existe $A_0 > 0$ tel que $a_{T_{f_0}}(\frac{\lambda}{2}) \le \left(\dfrac{2A_0}{\lambda}\|f_0\|_{p_0}\right)^{p_0}$.
Ainsi, par l'inégalité (2.2), $a_{T_f}(\lambda) \le \lambda^{-p_0}(2A_0)^{p_0} \displaystyle\int_{\left\{|f(x)|>\frac{\lambda}{2A_1}\right\}} |f(x)|^{p_0}\ \mathrm{d}\mu(x)$.

• Si $p_1 < \infty$: par hypothèse, il existe $A_0, A_1 > 0$ tels que

$$a_{T_{f_i}}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \le \left(\frac{2A_i}{\lambda}\|f_i\|_{p_i}\right)^{p_i}, i = 0, 1.$$

Ainsi, par l'inégalité (2.2) il vient

$$a_{T_f}(\lambda) \le \lambda^{-p_0}(2A_0)^{p_0} \int_{\{|f(x)|>c\lambda\}} |f(x)|^{p_0}\ \mathrm{d}\mu(x) + \lambda^{-p_1}(2A_1)^{p_1} \int_{\{|f(x)|\le c\lambda\}} |f(x)|^{p_1}\ \mathrm{d}\mu(x).$$

- **Deuxième étape** : Majoration de $\|Tf\|_p$.
Comme précédemment, on fait une distinction de cas :

• Si $p_1 = \infty$: par la formule (2.1) on a

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &= p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} a_{T_f}(\lambda)\ \mathrm{d}\lambda \\
&\leq p \int_0^{+\infty} \left(\lambda^{p-1-p_0} (2A_0)^{p_0} \int_{\left\{|f(x)| \leq \frac{\lambda}{2A_1}\right\}} |f(x)|^{p_0}\ \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\lambda \\
&= p(2A_0)^{p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} \left(\int_0^{2A_1|f(x)|} \lambda^{p-1-p_0}\ \mathrm{d}\lambda \right) \mathrm{d}\mu(x) \qquad \text{par Fubini} - \text{Tonelli} \\
&= p(2A_0)^{p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} \left(\frac{(2A_1)^{p-p_0}}{p-p_0} |f(x)|^{p-p_0} \right) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \frac{p}{p-p_0} (2A_0)^{p_0} (2A_1)^{p-p_0} \|f\|_p^p
\end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat.

• Si $p_1 < \infty$: en utilisant l'inégalité sur a_{T_f} et en procédant comme pour le cas $p_1 = \infty$ on trouve

$$\|Tf\|_p \leq \left(\frac{p}{p-p_0} \frac{(2A_0)^{p_0}}{c^{p-p_0}} + \frac{p}{p_1-p} \frac{(2A_1)^{p_0}}{c^{p-p_1}} \right) \|f\|_p^p$$

ce qui prouve que T est de type fort (p,p).
Choisissons maintenant $c > 0$ de sorte que $\varphi(c) := \dfrac{p}{p-p_0} \dfrac{(2A_0)^{p_0}}{c^{p-p_0}} + \dfrac{p}{p_1-p} \dfrac{(2A_1)^{p_0}}{c^{p-p_1}}$ soit minimal. En étudiant φ sur $]0,+\infty[$ on trouve que cette fonction admet un minimum en un point c' tel que $(2A_0c')^{p_0} = (2A_1c')^{p_1}$. En écrivant $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{p_1} + \dfrac{1-\theta}{p_0}$ où $\theta \in]0,1[$ on trouve alors que $\varphi(c') = 2^p p \left(\dfrac{1}{p-p_0} + \dfrac{1}{p_1-p} \right) A_0^{p(1-\theta)} A_1^{p\theta}$.
Ainsi,

$$\|Tf\|_p \leq 2p^{1/p} \left(\frac{1}{p-p_0} + \frac{1}{p_1-p} \right)^{1/p} A_0^{1-\theta} A_1^{\theta} \|f\|_p^p.$$

□

2.3 Décomposition de Calderon-Zygmund

Pour $k \in \mathbb{Z}$ on note $\mathcal{Q}_k$ l'ensemble des intervalles $[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}[, n \in \mathbb{Z}$. Les éléments de $\cup_k \mathcal{Q}_k$ sont appelés intervalles dyadiques.

On remarque que :
- Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, il existe dans $\mathcal{Q}_k$ un unique intervalle contenant x ;
- Deux intervalles dyadiques sont disjoints ou l'un est contenu dans l'autre ;
- Un intervalle dyadique de $\mathcal{Q}_k$ est contenu dans un unique intervalle de chaque famille $\mathcal{Q}_j,\ j < k$, et contient 2 intervalles dyadiques de $\mathcal{Q}_{k+1}$.

Pour $f \in L^1_{\text{loc}}$ on définit :

$$E_k f(x) := \sum_{I \in \mathcal{Q}_k} \left(\frac{1}{|I|} \int_I f \right) \chi_I(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(2^k \int_{\frac{n}{2^k}}^{\frac{n+1}{2^k}} f \right) \chi_{\left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}\right[}(x).$$

E_k est donc l'espérance conditionnelle de f par rapport à la $\sigma-$algèbre engendrée par $\mathcal{Q}_k$. De plus, si Ω désigne une réunion d'intervalles de $\mathcal{Q}_k$, on a $\displaystyle\int_\Omega E_k f = \int_\Omega f$.

Définition 2.3.1. *La fonction définie par* $M_d f(x) = \sup\limits_{k \in \mathbb{Z}} |E_k f(x)|$ *est appelée fonction dyadique maximale.*

Théorème 2.3.1. 1. *La fonction dyadique maximale est de type faible* $(1, 1)$.
2. *Si* $f \in L^1_{\text{loc}}$, $\lim\limits_{k \to +\infty} E_k f(x) = f(x)$ *presque partout.*

Démonstration. 1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Quitte à décomposer f en ses parties réelle et imaginaire puis à décomposer celles-ci en parties positive et négative, on peut supposer $f \geq 0$.
On a $\{x \in \mathbb{R} : M_d f(x) > \lambda\} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_k$ où

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R} : E_k f(x) > \lambda \text{ et } E_j f(x) \leq \lambda \text{ si } j < k\}.$$

Ainsi, $x \in \Omega_k$ si $(E_j f(x))_{j \in \mathbb{Z}}$ dépasse λ pour la première fois au rang k. Un tel k existe bien car l'inégalité $|E_j f(x)| \leq 2^j \|f\|_1$ montre que $E_j f(x) \to 0$ lorsque $j \to -\infty$.
Les Ω_k sont clairement disjoints et d'après l'expression des $E_j f$ (qui sont constantes sur les intervalles de $\mathcal{Q}_j$), Ω_k s'écrit comme réunion d'intervalles de $\mathcal{Q}_k$.
Ainsi, puisque sur Ω_k, $\dfrac{E_k f}{\lambda} > 1$, on a $|\Omega_k| \leq \displaystyle\int_{\Omega_k} \frac{E_k f(x)}{\lambda} \, \mathrm{d}x$ et donc

$$|\{x \in \mathbb{R} : M_d f(x) > \lambda\}| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\Omega_k| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\Omega_k} E_k f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\Omega_k} f(x) \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1.$$

2. Montrons d'abord le résultat lorsque $f \in \mathcal{C}^0 \cap L^1$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note I_k^x l'unique intervalle de $\mathcal{Q}_k$ contenant x, de sorte que $E_k f(x) = \dfrac{1}{|I_k^x|} \displaystyle\int_{I_k^x} f(t) \, \mathrm{d}t$. On a alors :

$$E_k f(x) - f(x) = \frac{1}{|I_k^x|} \int_{I_k^x} (f(t) - f(x)) \, \mathrm{d}t \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par continuité de f et car $|I_k^x| \to 0$ lorsque $k \to +\infty$.

Puisque $M_d f$ est de type faible $(1, 1)$, le théorème (2.1.1) appliqué à $T = Id_{L^1}$ montre que la limite précédente reste valable si $f \in \overline{\mathcal{C}^0 \cap L^1}^{\|\cdot\|_1} = L^1$.
Enfin, si $f \in L^1_{\text{loc}}$ alors $f \chi_I \in L^1$ pour un intervalle $I \in \mathcal{Q}_0$. Ainsi, la limite a lieu pour presque tout $x \in I$ et ce pour tout $I \in \mathcal{Q}_0$ donc pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Théorème 2.3.2 (Décomposition de Calderon-Zygmund). *Soit f une fonction intégrable et positive et soit $\lambda > 0$. Alors il existe une suite $(I_n)_n$ d'intervalles dyadiques deux à deux disjoints tels que :*

(i) $f(x) \leq \lambda$ *pour presque tout* $x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *;*

(ii) $| \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n| \leq \dfrac{1}{\lambda}\|f\|_1$ *;*

(iii) $\lambda < \dfrac{1}{I_n}\displaystyle\int_{I_n} f \leq 2\lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On reprend les Ω_k construits dans la démonstration précédente. On a vu que Ω_k s'écrivait comme une réunion d'intervalles de $\mathcal{Q}_k$. Soit $(I_n)_n$ la famille formée de tous les intervalles constituant les Ω_k.
- Si $x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ alors pour tout $k, E_k f(x) \leq \lambda$ donc par le point 2. du théorème précédent on obtient, en passant à la limite lorsque $k \to +\infty$, que $f(x) \leq \lambda$, ce qui donne (i).
- L'inégalité de (ii) provient de la bornitude faible $(1,1)$ de $M_d f$.
- Par définition des Ω_k on a $\dfrac{1}{|I_n|}\displaystyle\int_{I_n} f > \lambda$, ce qui donne la première inégalité de (iii).
Pour la seconde inégalité on remarque que si $\tilde{I_n}$ désigne l'intervalle dyadique contenant I_n et de longueur le double de celle de I_n, alors la moyenne de f sur $\tilde{I_n}$ est au plus λ. En effet, $\tilde{I_n} \notin \{I_j, j \in \mathbb{N}\}$ par définition des Ω_k. On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I_n|}\int_{I_n} f &\leq \frac{|\tilde{I_n}|}{|I_n|}\frac{1}{|\tilde{I_n}|}\int_{\tilde{I_n}} f \qquad \text{car } f \geq 0 \\ &\leq 2\lambda\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité souhaitée.

□

2.4 Fonction maximale de Hardy-Littlewood

Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit :

$$Mf(x) = \sup_{r>0}\left(\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} |f(x-y)| \, \mathrm{d}y\right).$$

Montrons que la fonction Mf est mesurable.

Pour tout $r > 0$, posons $\varphi_r(x) = \dfrac{1}{2r}\displaystyle\int_{-r}^{r} |f(x-y)| \, \mathrm{d}y$. On a

$$\varphi_r(x) = \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f(u)| \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2r}\int_{\mathbb{R}} |f(u)|\chi_{]x-r,x+r[}(u) \, \mathrm{d}u.$$

Si $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$, alors $\varphi(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$.
En effet, si a est un majorant de $(x_n)_n$ on a $|f|\chi_{]x-r,x+r[} \leq |f|\chi_{]-a-r,a+r[} \in L^1(\mathbb{R})$ par hypothèse, et $\chi_{]x_n-r,x_n+r[} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_{]x-r,x+r[}$ presque partout. On conclut alors à l'aide du théorème de convergence dominée.
Ainsi, φ_r est séquentiellement continue donc continue. Mais alors $Mf = \sup\limits_{r>0} \varphi_r$ est semi-continue inférieurement, donc mesurable.

Remarque 2.4.1. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty$, alors f est localement intégrable.*

Théorème 2.4.1. *M est de type faible $(1,1)$ et de type fort (p,p) pour $1 < p < \infty$.*

Démonstration. Puisque $M(f) = M(|f|)$ on peut supposer f positive. Montrons alors l'inégalité suivante :

$$|\{x \in \mathbb{R} : Mf(x) > 4\lambda\}| \leq 2|\{x \in \mathbb{R} : M_d f(x) > \lambda\}|. \tag{2.3}$$

On a vu que $|\{x \in \mathbb{R} : M_d f(x) > \lambda\}| = |\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n|$. Soit $2I_n$ l'intervalle de même centre que I_n et de longueur le double de celle de I_n. Puisque $|\cup_{n\in\mathbb{N}} 2I_n| \leq 2|\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n|$ il suffit alors de montrer l'inclusion suivante :

$$\{x \in \mathbb{R} : Mf(x) > 4\lambda\} \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} 2I_n. \tag{2.4}$$

Soit $x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} 2I_n$ fixé et soit I un intervalle centré en x. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{k-1} \leq |I| \leq 2^k$. Alors I intersecte un ou deux intervalles de $\mathcal{Q}_{-k}$. Supposons par exemple que I intersecte deux de ces intervalles qu'on note J_1 et J_2. Les J_i ne sont contenus dans aucun des I_n car on aurait alors que $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} 2I_n$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi, la moyenne de f sur les J_i est au plus λ et on a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|}\int_f = \frac{1}{|I|}\sum_{i-1}^{2}\int_{I\cap J_i} &\leq \sum_{i-1}^{2}\frac{2^k}{|I|}\frac{1}{|J_i|}\int_{J_i} f \quad && \text{car } f \geq 0 \text{ et } |J_i| = 2^k \\ &\leq 4\lambda && \text{car } \frac{1}{|I|} \leq \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

Le cas où I n'intersecte qu'un intervalle de $\mathcal{Q}_{-k}$ se traite de façon similaire et permet d'aboutir à la même inégalité. Cette dernière étant valable pour tout intervalle I centré en x on en déduit que $Mf(x) \leq 4\lambda$. Ceci prouve l'inclusion (2.4) et l'inégalité (3.3.1) est alors démontrée.

D'après le théorème (2.3.1) M_d est de type faible $(1,1)$, ce qui nous donne :

$$|\{x \in \mathbb{R} : Mf(x) > \lambda\}| \leq 2\left|\left\{x \in \mathbb{R} : M_d f(x) > \frac{\lambda}{4}\right\}\right| \leq \frac{8}{\lambda}\|f\|_1.$$

La première partie du théorème est ainsi démontrée.

Pour la seconde partie, on remarque que si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ on a $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ donc M est de type faible (∞,∞). On conclut alors avec le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz. □

Proposition 2.4.1. *Soit ϕ une fonction positive, paire, décroissante sur $[0,+\infty[$ et intégrable. Alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$,*

$$\sup_{t>0}|\phi_t \star f(x)| \leq \|\phi\|_1 Mf(x)$$

où $\phi_t = \frac{1}{t}\phi\left(\frac{\cdot}{t}\right)$.

Démonstration. Supposons de plus que ϕ est étagée. Alors ϕ s'écrit $\phi(x) = \sum_j a_j\chi_{(-r_j,r_j)}(x)$ avec $a_j > 0$. On a $\|\phi\|_1 = \sum_j 2r_j a_j$ donc

$$\phi \star f(x) = \sum_j 2r_j a_j \frac{1}{2r_j}\chi_{(-r_j,r_j)} \star f(x) \leq \|\phi\|_1 Mf(x).$$

Si ϕ n'est pas étagée, il existe une suite $(\phi_n)_n$ de fonctions étagées vérifiant les mêmes hypothèses que ϕ et qui converge simplement vers ϕ en croissant. Alors

$$|\phi \star f(x) - \phi_n \star f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\phi(t) - \phi_n(t)||f(x-t)| \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} (\phi(t) - \phi_n(t))|f(x-t)| \, \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par convergence monotone.
Or les ϕ_n vérifient

$$|\phi_n \star f(x)| \leq \|\phi_n\|_1 Mf(x) \leq \|\phi\|_1 Mf(x).$$

On obtient alors le résultat en passant à la limite dans cette dernière inégalité. $\square$

CHAPITRE 3

TRANSFORMÉE DE HILBERT

3.1 Définition

Soit $m_{\mathcal{H}}$ l'élément de $L^\infty(\mathbb{R})$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} m_{\mathcal{H}} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \xi & \longmapsto & -i\mathrm{sgn}(\xi) \end{array} \tag{3.1}$$

et $h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite définie par

$$h_n = -i\ \mathrm{sgn}(n) = \begin{cases} i & \text{si } n < 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -i & \text{si } n > 0 \end{cases} .$$

Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $P = \sum_k a_k e_k \in \mathcal{P}$ on désignera respectivement par $\mathcal{H}f$ et $\mathcal{H}P$ les éléments $T_\varphi(f)$ et $T_h P$, c'est-à-dire $\widehat{\mathcal{H}f} = m_{\mathcal{H}}\widehat{f}$ et $\mathcal{H}P = \sum_k -i\mathrm{sgn}(k)a_k e_k$. $\mathcal{H}f$ et $\mathcal{H}P$ sont appelés transformées de Hilbert de f et P.

Dans un premier temps, on va démontrer que pour tout $1 < p < \infty, m_{\mathcal{H}}$ et h sont des multiplicateurs de Fourier respectivement sur $L^p(\mathbb{R})$ et $L^p(\mathbb{T})$ (théorème de Riesz). On aura besoin des propriétés suivantes de $\mathcal{H}$:

Proposition 3.1.1. *Si $P \in \mathcal{P}$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$ sont à valeurs réelles, alors $\mathcal{H}P$ et $\mathcal{H}f$ le sont aussi.*

Démonstration. - Soit $P = \sum_k \widehat{P}(k)e_k \in \mathcal{P}$.
P réel $\Leftrightarrow P = \overline{P} \Leftrightarrow \sum_k \widehat{P}(k)e_k = \sum_k \overline{\widehat{P}(k)}e_{-k} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \widehat{P}(-k) = \overline{\widehat{P}(k)}$.
Ainsi, si P est réel, on a

$$\mathcal{H}P = \sum_k -i\mathrm{sgn}(k)\widehat{P}(k)e_k = \sum_{k\geq 1}(-i\widehat{P}(k)e_k + \sum_{k\geq 1} i\widehat{P}(-k))e_{-k} = \sum_{k\geq 1} -i\widehat{P}(k)e_k + \overline{\sum_{k\geq 1} -i\widehat{P}(k)e_k},$$

donc $\mathcal{H}P$ est à valeurs réelles.

- Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ à valeurs réelles. Pour $g \in L^2(\mathbb{R})$, on note g^- la fonction $x \mapsto g(-x)$. Montrons que $\overline{\widehat{f}} = (\widehat{f})^-$. Soit $(f_n)_n \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ une suite de fonctions à valeurs réelles telle que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Pour tout n, on a $\overline{\widehat{f_n}(\xi)} = \overline{\int_{\mathbb{R}} f_n(x)e^{-2i\pi x\xi}\mathrm{d}x} = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)e^{2i\pi x\xi}\mathrm{d}x = (\widehat{f_n})^-(\xi)$ car f est réelle.
Ainsi, $\|\overline{\widehat{f}} - (\widehat{f_n})^-\|_2 = \|\overline{\widehat{f}} - \overline{\widehat{f_n}}\|_2 = \|\widehat{f} - \widehat{f_n}\|_2 = \|f - f_n\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or, on a également $\|(\widehat{f})^- - (\widehat{f_n})^-\|_2 = \|\widehat{f} - \widehat{f_n}\|_2 = \|f - f_n\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par unicité de la limite, $\overline{\widehat{f}} = (\widehat{f})^-$ presque partout.

Montrons maintenant que $\mathcal{H}f$ est à valeurs réelles. On a $\widehat{\mathcal{H}f} = m_{\mathcal{H}}\widehat{f}$, donc par ce qui précède, et compte-tenu du fait que $\overline{m_{\mathcal{H}}} = -m_{\mathcal{H}}$, on a $\overline{\widehat{\mathcal{H}f}} = -m_{\mathcal{H}}(\widehat{f})^-$. Or, $\mathcal{H}f$ est limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de la fonction $\varphi_R(x) = \int_{-R}^{R} \widehat{\mathcal{H}f}(\xi)e^{2i\pi\xi x}\mathrm{d}\xi$ lorsque $R \to +\infty$. On a $\overline{\varphi_R}(x) = \int_{-R}^{R} \overline{\widehat{\mathcal{H}f}}(\xi)e^{-2i\pi\xi x}\mathrm{d}\xi = \int_{-R}^{R} -m_{\mathcal{H}}(\xi)(\widehat{f})^-(\xi)e^{-2i\pi\xi x}\mathrm{d}\xi$ et le changement de variables $u = -\xi$ donne alors que $\overline{\varphi_R}(x) = \int_{-R}^{R} -m_{\mathcal{H}}(\xi)(\widehat{f})^-(\xi)e^{-2i\pi\xi x}\mathrm{d}\xi = \int_{-R}^{R} -m_{\mathcal{H}}(-u)(\widehat{f})^-(-u)e^{2i\pi ux}\mathrm{d}u = \int_{-R}^{R} m_{\mathcal{H}}(u)\widehat{f}(u)e^{2i\pi ux}\mathrm{d}u = \varphi_R(x)$. $\mathcal{H}f$ est donc à valeurs réelles comme limite d'une suite de fonctions à valeurs réelles. □

En particulier, si $P \in \mathcal{P}$, $\mathcal{H}(\mathrm{Re}P)$ et $\mathcal{H}(\mathrm{Im}P)$ sont à valeurs réelles. Par linéarité de $\mathcal{H}$ on a $\mathcal{H}P = \mathcal{H}(\mathrm{Re}P) + i\mathcal{H}(\mathrm{Im}P)$, de sorte que $\overline{\mathcal{H}P} = \mathcal{H}(\mathrm{Re}P) - i\mathcal{H}(\mathrm{Im}P) = \mathcal{H}(\mathrm{Re}P - i\mathrm{Im}P) = \mathcal{H}\overline{P}$.
De même, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\overline{\mathcal{H}f} = \mathcal{H}\overline{f}$.

Proposition 3.1.2. 1. *Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ on a :*

$$(i)\|\mathcal{H}f\|_2 = \|f\|_2,\ \mathcal{H}(\mathcal{H}f) = -f\ ;$$
$$(ii)\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}f.g = -\int_{\mathbb{R}} f\mathcal{H}g.$$

2. *Si $P, Q \in \mathcal{P}$ alors :*

$$(i)\ \text{Si}\ \widehat{P}(0) = 0, \|\mathcal{H}P\|_2 = \|P\|_2,\ \mathcal{H}(\mathcal{H}P) = -P\ ;$$
$$(ii)\int_{[0,2\pi]} \mathcal{H}P.Q = -\int_{[0,2\pi]} P\mathcal{H}Q.$$

Démonstration. 1. La transformée de Fourier-Plancherel étant une isométrie on a :

$$\|\mathcal{H}f\|_2 = \|\widehat{\mathcal{H}f}\|_2 = \| - i\mathrm{sgn}(.)\widehat{f}\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

De plus, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\mathcal{H}(\mathcal{H}f)}(\xi) = -i\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{\mathcal{H}f}(\xi) = (-i\mathrm{sgn}(\xi))^2\widehat{f}(\xi) = -\widehat{f}(\xi),$$

donc par injectivité, $\mathcal{H}(\mathcal{H}f) = -f$, ce qui achève de prouver le point (i).
En particulier, $\mathcal{H}$ conserve la norme $\|.\|_2$ donc par les formules de polarisation, $\mathcal{H}$ préserve le produit scalaire, ce qui donne :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}f.g = \langle \mathcal{H}f \mid \overline{g}\rangle = \langle \mathcal{H}(\mathcal{H}f) \mid \mathcal{H}(\overline{g})\rangle = -\langle f \mid \overline{\mathcal{H}g}\rangle = -\int_{\mathbb{R}} f\mathcal{H}g,$$

d'où la propriété (ii).

2. Soit $P = \sum_k a_k e_k \in \mathcal{P}$ tel que $\widehat{P}(0) = 0$. L'égalité $\|\mathcal{H}P\|_2 = \|P\|_2$ est une conséquence du théorème de Parseval. La seconde égalité du point (i) se prouve par un calcul direct :

$$\begin{aligned} H(\mathcal{H}P) = \mathcal{H}\left(\sum_k -i\mathrm{sgn}(k) a_k e_k\right) = \sum_k (-i\mathrm{sgn}(k))^2 a_k e_k &= -\sum_k a_k e_k \quad \text{car } a_0 = 0 \\ &= -P. \end{aligned}$$

Soient maintenant $P, Q \in \mathcal{P}$ quelconques. Alors $P_1 := P - \widehat{P}(0)$ et $Q_1 := Q - \widehat{Q}(0)$ vérifient $\widehat{P_1}(0) = 0$ et $\widehat{Q_1}(0) = 0$. Comme au 1., on trouve alors :

$$\int_{[0,2\pi]} \mathcal{H}P_1.Q_1 = -\int_{[0,2\pi]} P_1 \mathcal{H}Q_1.$$

Puisque $\mathcal{H}P_1 = \mathcal{P}$ et $\mathcal{H}Q_1 = \mathcal{H}Q$, l'égalité précédente s'écrit également, après avoir remplacé P_1 et Q_1 par leur expression,

$$\int_{[0,2\pi]} \mathcal{H}P.Q - \widehat{Q}(0) \int_{[0,2\pi]} \mathcal{H}P = -\int_{[0,2\pi]} \mathcal{H}Q.P + \widehat{P}(0) \int_{[0,2\pi]} \mathcal{H}Q.$$

Or, $\displaystyle\int_{[0,2\pi]} \mathcal{H}P = \int_{[0,2\pi]} \mathcal{H}Q = 0$, ce qui donne le point (ii).

□

Lorsque $\widehat{P}(0) \neq 0$ on peut voir de plus que $\|\mathcal{H}P\|_2 \leq \|P\|_2$. Cette inégalité ainsi que l'égalité $\|\mathcal{H}f\|_2 = \|f\|_2$ pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ montrent que $\mathcal{H}$ est un multiplicateur de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{T})$. On montrera dans la preuve du théorème de Riesz que $\mathcal{H}$ est un multiplicateur sur $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 < p \leq 2$ et sur $L^p(\mathbb{T})$ pour $2 \leq p < \infty$. Les propriétés 1.(ii) et 2.(ii) de la proposition précédente permettront alors de traiter les cas restants en raisonnant par dualité.

Dans un second temps, on exprimera la transformée de Hilbert sur $\mathbb{R}$ comme une intégrale singulière : on va prouver que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, on a :

$$\text{pour presque tout } x \in \mathbb{R},\ \mathcal{H}f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}\, \mathrm{d}y \tag{3.2}$$

ou encore, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{H}f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{H}_\epsilon f(x)$ où $\mathcal{H}_\epsilon f(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}\, \mathrm{d}y$. On démontrera également la convergence dans $L^p(\mathbb{R})$ de $\mathcal{H}_\epsilon f$ vers $\mathcal{H}f$ lorsque ϵ tend vers 0.
Remarquons que pour tout $\epsilon > 0$, $\mathcal{H}_\epsilon$ est une application linéaire bien définie sur $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p < \infty$ puisque $\mathcal{H}_\epsilon f$ est le produit de convolution de $f \in L^p(\mathbb{R})$ et de la fonction $y \longmapsto \dfrac{1}{\pi y} \chi_{\{|y|>\epsilon\}}$ qui est dans $L^q(\mathbb{R})$ (avec q l'exposant conjugué de p).

La démonstration de l'égalité (3.2) se fera en deux temps : prouver qu'elle est vraie pour les fonctions de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ puis démontrer que pour $1 < p < \infty$, la famille $\{\mathcal{H}_\epsilon\}$ est uniformément bornée sur $L^p(\mathbb{R})$ afin d'utiliser les résultats de la section précédente qui permettront d'étendre cette égalité aux éléments de $L^p(\mathbb{R})$.

On va démontrer dès maintenant l'égalité (3.2) lorsque $f \in \mathcal{S}$.

Posons, pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $Q_t(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{x}{t^2+x^2}$.
Alors $Q_t \in L^2(\mathbb{R})$ et $\widehat{Q_t}(\xi) = -i\mathrm{sgn}(\xi)e^{-2\pi t|\xi|}$.

Pour voir cela, on remarque que si $g(x) = -i\mathrm{sgn}(x)e^{-2\pi t|x|}$ alors $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} -i\mathrm{sgn}(x)e^{-2\pi t|x|}e^{-2i\pi\xi x}\,\mathrm{d}x &= i\int_{-\infty}^{0} e^{-2\pi(i\xi - t)x}\,\mathrm{d}x - i\int_{0}^{-\infty} e^{-2\pi(t+i\xi)x}\,\mathrm{d}x \\
&= i\lim_{N\to+\infty}\left[\frac{e^{-2\pi(i\xi-t)x}}{2\pi(t-i\xi)}\right]_{-N}^{0} - i\lim_{M\to+\infty}\left[\frac{e^{-2\pi(t+i\xi)x}}{2\pi(t+i\xi)}\right]_{0}^{M} \\
&= i\frac{1}{2\pi(t-i\xi)} - i\frac{1}{2\pi(t+i\xi)} \\
&= \frac{\xi}{\pi(t^2+\xi^2)} \\
&= Q_t(\xi).
\end{aligned}$$

On conclut alors, par la formule d'inversion, que $\widehat{Q_t}(\xi) = g(\xi)$.

Ainsi, $\widehat{Q_t \star f}(\xi) = -i\mathrm{sgn}(\xi)e^{-2\pi t|\xi|}\widehat{f}(\xi)$, de sorte que $\widehat{Q_t \star f}$ converge simplement, lorsque $t \to 0$, vers $\widehat{\mathcal{H}f}$. Puisque $|\widehat{Q_t \star f}| \leq |\widehat{f}| \in L^2(\mathbb{R})$, on a par convergence dominée que $\widehat{Q_t \star f}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers $\widehat{\mathcal{H}f}$. La transformée de Fourier-Plancherel étant une isométrie, on en déduit que $Q_t \star f$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{H}f$. En particulier, il existe une suite $(t_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ décroissante vers 0 telle que $Q_{t_n} \star f \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{H}f$ presque partout.

Montrons maintenant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \mathcal{H}_\epsilon f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\mathcal{H}_\epsilon f(x) = \lim\limits_{t\to 0} Q_t \star f(x)$, ce qui prouvera la formule (3.2). Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $y \mapsto \dfrac{f(x-y)}{y}\chi_{\{|y|>1\}}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions de carré intégrable, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\pi\mathcal{H}_\epsilon f(x) = \int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}\,\mathrm{d}y &= \int_{\epsilon<|y|<1} \frac{f(x-y)}{y}\,\mathrm{d}y + \int_{|y|>1} \frac{f(x-y)}{y}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)-f(x)}{y}\,\mathrm{d}y + \int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

puisque l'intégrale de $y \mapsto \dfrac{1}{y}$ sur $\{y \in \mathbb{R} : \epsilon < |y| < 1\}$ est nulle. La fonction $y \mapsto \dfrac{f(x-y)-f(x)}{y}$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 grâce au caractère $\mathcal{C}^1$ de f, ce qui prouve que la première intégrale a une limite lorsque $\epsilon \to 0$. Ainsi, la limite $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \mathcal{H}_\epsilon f(x)$ existe bien.

Il reste à voir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\epsilon \to 0} (\mathcal{H}_\epsilon f - Q_\epsilon \star f)(x) = 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\pi(\mathcal{H}_\epsilon f - Q_\epsilon \star f)(x) &= \int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}} \frac{yf(x-y)}{\epsilon^2+y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{|y|>\epsilon} f(x-y)\frac{\epsilon^2}{y(\epsilon^2+y^2)}\,\mathrm{d}y - \int_{|y|\leq\epsilon} \frac{yf(x-y)}{\epsilon^2+y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{|u|>1} \frac{f(x-\epsilon u)}{u(1+u^2)}\,\mathrm{d}u - \int_{|u|\leq 1} \frac{uf(x-\epsilon u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

grâce au changement de variables $y = \epsilon u$. Par convergence dominée, les deux membres de l'égalité précédente tendent vers $\displaystyle\int_{|u|>1} \frac{f(x)}{u(1+u^2)}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{|u|\leq 1} \frac{uf(x)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ et ces intégrales sont nulles car les intégrandes sont impaires. Ceci achève la démonstration de l'égalité (3.2) lorsque $f \in \mathcal{S}$.

Remarque 3.1.1. *Dans cette démonstration, on a seulement eu besoin du fait que f était bornée, de classe $\mathcal{C}^1$ et dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Remarque 3.1.2. *Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non réduit à un point. On a également l'existence d'une suite $(t_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ décroissante vers 0 telle que $Q_{t_n} \star g \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{H}g$ presque partout car dans la démonstration précédente, seul le fait que $f \in L^2(\mathbb{R})$ a été exploité pour prouver ce point. Ainsi, si $\lim\limits_{t\to 0} Q_t \star f(x)$ existe pour tout $x \in I$, alors cette limite est égale presque partout sur I à $\mathcal{H}g$. Cette remarque sera utile lors de la démonstration du théorème de Riesz où l'on aura besoin d'une expression pour $\mathcal{H}$ afin d'effectuer certaines majorations.*
Enfin, si g est à valeurs réelles, $Q_t \star g$ l'est également, ce qui fournit une nouvelle démonstration du fait que $\mathcal{H}g$ est à valeurs réelles.

Les résultats des sections (2.2) et (2.3) nous seront utiles pour la preuve du théorème de Riesz. Les sections (2.1) et (2.4) permettront quant à elles de démontrer la convergence en norme et la convergence presque partout des $\mathcal{H}_\epsilon$.

3.2 Par l'analyse réelle

3.2.1 Théorème de Riesz sur $\mathbb{R}$

Théorème 3.2.1 (Kolmogorov)**.** *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et pour tout $\lambda > 0$,*

$$|\{x \in \mathbb{R} : |\mathcal{H}f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

Démonstration. - Soit $\lambda > 0$ et supposons f positive. Par le théorème (2.3.2) il existe une suite $(I_n)_n$ d'intervalles disjoints telle que :

(i) $f(x) \leq \lambda$ pour presque tout $x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n := \Omega$;

(ii) $|\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n| \leq \dfrac{1}{\lambda}\|f\|_1$;

(iii) $\lambda < \dfrac{1}{I_n}\displaystyle\int_{I_n} f \leq 2\lambda.$

Décomposons f en $f = g + b$ où :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ \dfrac{1}{|I_n|}\int_{I_n} f & \text{si } x \in I_n \end{cases}$$

et $b(x) = \displaystyle\sum_n b_n(x)$ où $b_n(x) = \left(f(x) - \dfrac{1}{|I_n|}\int_{I_n} f\right)\chi_{I_n}(x)$.

On remarque que $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ puisque $g = f$ sur $\mathbb{R}\setminus\Omega$ et g est bornée sur Ω qui est de mesure finie. On en déduit que $b = f - g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
Comme $\mathcal{H}f = \mathcal{H}g + \mathcal{H}b$ on a :

$$|\{x \in \mathbb{R} : |\mathcal{H}f(x)| > \lambda\}| \leq \left|\left\{x \in \mathbb{R} : |\mathcal{H}g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in \mathbb{R} : |\mathcal{H}b(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|.$$

On estime maintenant chaque terme du membre de gauche de cette inégalité.

- Pour le premier, on remarque que $0 \leq g \leq 2\lambda$ et que f et g ont même intégrale. Ainsi,

$$\begin{aligned}\left|\left\{x \in \mathbb{R} : |\mathcal{H}g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| = \int_{\left\{|\mathcal{H}g(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}} \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{H}g(x)|^2}{(\frac{\lambda}{2})^2}\mathrm{d}x &= \frac{4}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}} g(x)^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{par (3.1.2)} \\ &\leq \frac{8}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{8}{\lambda}\|f\|_1.\end{aligned}$$

- Soit $2I_n$ l'intervalle de même centre que I_n, de longueur le double de celle de I_n. Posons $\Omega^* = \cup_n(2I_n)$. Alors $|\Omega^*| \leq 2|\Omega| \leq \dfrac{2}{\lambda}\|f\|_1$ et on a :

$$\begin{aligned}\left|\left\{x \in \mathbb{R} : |\mathcal{H}b(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| &= \left|\left\{x \in \Omega^* : |\mathcal{H}b(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \notin \Omega^* : |\mathcal{H}b(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\ &\leq |\Omega^*| + \int_{\left\{x\notin\Omega^*\,:\,|\mathcal{H}b(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}} \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{2}{\lambda}\|f\|_1 + \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*} |\mathcal{H}b(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Il reste donc à majorer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*} |\mathcal{H}b(x)|\,\mathrm{d}x.$ $(*)$
Montrons d'abord que $|\mathcal{H}b(x)| \leq \sum_n |\mathcal{H}b_n(x)|$. C'est évident si la somme est finie et dans le contraire,

commençons par remarquer que $\sum_n \mathcal{H}b_n$ converge vers $\mathcal{H}b$ dans $L^2(\mathbb{R})$. En effet, par la relation (3.1.2) on a :

$$\left\|\mathcal{H}b - \sum_{k=0}^{n} \mathcal{H}b_k\right\|_2 = \left\|\mathcal{H}(b - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k)\right\|_2 = \left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right\|_2 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|b_k\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

puisque la série $\sum_k \|b_k\|_2$ est convergente, de somme $\|b\|_2$.

On en déduit qu'il existe une sous-suite $(n_k)_k$ telle que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n_k} \mathcal{H}b_j \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{H}b$ presque partout.

On obtient alors que, presque partout,

$$|\mathcal{H}b(x)| = \lim_{k\to+\infty} \left|\sum_{j=1}^{n_k} \mathcal{H}b_j(x)\right| \leq \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=1}^{n_k} |\mathcal{H}b_j(x)| = \sum_{j=1}^{+\infty} |\mathcal{H}b_j(x)|.$$

Ainsi, pour majorer $(*)$, il suffit de montrer que $\displaystyle\sum_n \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_n} |\mathcal{H}b_n(x)| \, \mathrm{d}x \leq C\|f\|_1$.

Pour cela, on prouve d'abord que pour $x \notin 2I_n, \mathcal{H}b_n(x) = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{I_n} \frac{b_n(y)}{x-y} \, \mathrm{d}y$.

En effet, $Q_t \star b_n(x) = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{I_n} \frac{(x-y)b_n(y)}{t^2+(x-y)^2} \, \mathrm{d}y \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}\int_{I_n} \frac{b_n(y)}{x-y} \, \mathrm{d}y$ par convergence dominée puisque $\forall t > 0, \displaystyle\left|\frac{(x-y)b_n(y)}{t^2+(x-y)^2}\right| \leq \left|\frac{b_n(y)}{x-y}\right| \leq \frac{2}{|I_n|}|b_n(y)|$ par hypothèse sur x. On conclut alors avec la remarque (3.1.2).

Soit c_n le centre de I_n. Puisque $\displaystyle\int_{I_n} b_n = 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\pi \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_n} |\mathcal{H}b_n(x)| \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_n} \left|\int_{I_n} \frac{b_n(y)}{x-y} \, \mathrm{d}y\right| &= \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_n} \left|\int_{I_n} b_n(y)\left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-c_n}\right) \mathrm{d}y\right| \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{I_n} |b_n(y)| \left(\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_n} \frac{|y-c_n|}{|x-y||x-c_n|} \, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \\
&\leq \int_{I_n} |b_n(y)| \left(\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_n} \frac{|I_n|}{|x-c_n|^2} \, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

car $|y-c_n| \leq \dfrac{|I_n|}{2}$ et $|x-y| \geq \dfrac{|x-c_n|}{2}$.

Comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_n} \frac{\mathrm{d}x}{|x-c_n|^2} = 2\int_{|I_n|}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{2}{|I_j|}$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_n} |\mathcal{H}b_n(x)| \, \mathrm{d}x \leq \frac{2}{\pi}\int_{I_n} |b_n(y)| \, \mathrm{d}y \leq \int_{I_n} |b_n(y)| \, \mathrm{d}y.$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_n \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_n} |\mathcal{H}b_n(x)|\, \mathrm{d}x \leq \sum_n \int_{I_n} |b_n(y)|\, \mathrm{d}y \leq 2\|f\|_1$ puisqu'on a

$$\int_{I_n} |b_n(y)|\, \mathrm{d}y \leq \int_{I_n} \left(|f(y)| + \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} |f| \right) \mathrm{d}y = 2 \int_{I_n} |f|.$$

- Si f n'est pas positive, on décompose ses parties réelle et imaginaire en parties positive et négative et on applique ce qui a été fait précédemment. Le théorème est ainsi démontré.

$\square$

Théorème 3.2.2 (Riesz)**.** *Pour $1 < p < \infty$, $m_{\mathcal{H}}$ est un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{R})$.*

Démonstration. - Supposons d'abord $1 < p \leq 2$.
$\mathcal{H}$ est de type faible $(1,1)$ et de type fort $(2,2)$ sur $L^1 \cap L^2$ donc par le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz (2.2.1), $\mathcal{H}$ est de type fort (p,p) sur $L^1 \cap L^2$. $\mathcal{H}$ s'étend alors en une application linéaire bornée de L^p dans lui-même. Ceci montre que $m_{\mathcal{H}}$ est un multiplicateur de Fourier sur L^p.

- Supposons maintenant $2 < p < \infty$. Soit p' l'exposant conjugué de p.
Pour $f \in L^2 \cap L^p$ on a :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}f\|_p = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}f.g \right| : g \in L^2 \cap L^{p'}, \|g\|_{p'} \leq 1 \right\} &= \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} f.\mathcal{H}g \right| : g \in L^2 \cap L^{p'}, \|g\|_{p'} \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \|\mathcal{H}g\|_{p'} \|f\|_p \\
&= C_{p'} \|f\|_p.
\end{aligned}$$

D'où le résultat par définition d'un multiplicateur. $\square$

Contre-exemple : $m_{\mathcal{H}}$ n'est un multiplicateur de Fourier ni sur $L^1(\mathbb{R})$, ni sur $L^\infty(\mathbb{R})$.
Pour le voir, on considère la fonction $f = \chi_{[0,1]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.
Alors $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{1 - e^{-2i\pi\xi}}{2i\pi\xi}$ donc $m_{\mathcal{H}}\widehat{f}(\xi) = -i\mathrm{sgn}(\xi) \dfrac{1 - e^{-2i\pi\xi}}{2i\pi\xi} = \dfrac{e^{-2i\pi\xi} - 1}{2\pi|\xi|}$.
$\mathcal{H}f$ est la limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de la fonction $\varphi_R(x) = \displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{e^{-2i\pi\xi} - 1}{2\pi|\xi|} e^{2i\pi\xi x}\, \mathrm{d}\xi$ lorsque R tend vers $+\infty$. Or, si x est différent de 0 ou 1 on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_R(x) &= \int_0^R \frac{e^{-2i\pi\xi} - 1}{2\pi\xi} e^{2i\pi\xi x}\, \mathrm{d}\xi + \int_0^R \frac{e^{2i\pi\xi} - 1}{2\pi\xi} e^{-2i\pi\xi x}\, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_0^R \frac{(e^{2i\pi\xi(x-1)} + e^{-2i\pi\xi(x-1)}) - (e^{2i\pi\xi x} + e^{-2i\pi\xi x})}{2\pi\xi}\, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_0^R \frac{\cos 2\pi\xi|x-1| - \cos 2\pi\xi|x|}{\pi\xi}\, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_0^R \frac{1 - \cos 2\pi\xi|x|}{\pi\xi}\, \mathrm{d}\xi - \int_0^R \frac{1 - \cos 2\pi\xi|x-1|}{\pi\xi}\, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{2\pi R|x-1|}^{2\pi R|x|} \frac{1 - \cos t}{\pi t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{x}{x-1} \right| - \int_{2\pi R|x-1|}^{2\pi R|x|} \frac{\cos t}{\pi t}\, \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

et cette dernière quantité tend vers $\log\left|\dfrac{x}{x-1}\right|$ lorsque R tend vers $+\infty$.
Ainsi, $\mathcal{H}f(x) = \dfrac{1}{\pi}\log\left|\dfrac{x}{x-1}\right|$, et $\mathcal{H}f$ n'est ni intégrable, ni bornée.

Remarque 3.2.1. *Par des calculs semblables, on montre que si $a < b$, $\mathcal{H}\chi_{[a,b]} = \dfrac{1}{\pi}\log\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|$.*

Le théorème (3.2.1) permet de définir la transformée de Hilbert $\mathcal{H}$ sur $L^1(\mathbb{R})$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $(f_n)_n \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ une suite qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. En particulier, la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy donc pour tout $\lambda > 0$, l'inégalité

$$\{x \in \mathbb{R} : |\mathcal{H}(f_k)(x) - \mathcal{H}(f_m)(x)| > \lambda\}\,| = |\,\{x \in \mathbb{R} : |\mathcal{H}(f_k - f_m)(x)| > \lambda\}\,| \leq \frac{C}{\lambda}\|f_k - f_m\|_1$$

montre que $(\mathcal{H}f_n)_n$ est une suite de Cauchy en mesure. On montre alors qu'il existe une fonction g mesurable et une sous-suite $(\mathcal{H}f_{n_k})_k$ qui converge presque uniformément vers g sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \subset \mathbb{R}$ mesurable tel que $|A^c| \leq \epsilon$ et $(\mathcal{H}f_{n_k})_k$ converge uniformément vers g sur A. On prouve ensuite que la suite $(\mathcal{H}f_n)_n$ converge en mesure vers g et enfin que si $(h_n)_n$ est une autre suite qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $(\mathcal{H}h_n)_n$ converge également en mesure vers g. La fonction g ainsi obtenue est appelée transformée de Hilbert de f. On vérifie en outre que g est dans l'espace $L^{1,\infty}$, c'est-à-dire que $\sup_{\lambda>0} \lambda a_g(\lambda) < \infty$.
Le contre-exemple précédent montre que la transformée de Hilbert d'une fonction intégrable n'est pas nécessairement intégrable.

3.2.2 Convergence en norme, convergence ponctuelle

Dans cette partie, on va démontrer que pour $1 < p < \infty$, $\mathcal{H}_\epsilon f$ converge vers $\mathcal{H}f$ dans $L^p(\mathbb{R})$ et presque partout. Pour ces résultats, on va prouver que l'opérateur maximal $\mathcal{H}^*$ associé à la famille $\{\mathcal{H}_\epsilon\}_{\epsilon\in\mathbb{Q}_+^*}$ est de type fort (p,p), dont la démonstration nécessite les deux lemmes suivants.

Lemme 3.2.1. *Si $f \in \mathcal{S}$, on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\frac{t}{t^2+\epsilon^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}f(x-t)\frac{\epsilon}{t^2+\epsilon^2}\,\mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

Démonstration. Pour démontrer cette inégalité, il suffit de prouver que les deux membres ont même transformée de Fourier. Le membre de gauche est $Q_\epsilon \star f(x)$ et le membre de droite $P_\epsilon \star \mathcal{H}f(x)$ où $P_\epsilon(t) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\epsilon}{t^2+\epsilon^2}$. On a déjà vu que $\widehat{Q_\epsilon \star f}(\xi) = \widehat{Q_\epsilon}(\xi)\widehat{f}(\xi) = -i\mathrm{sgn}(\xi)e^{-2\pi\epsilon|\xi|}\widehat{f}(\xi)$. En calculant la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-2\pi\epsilon|x|}$ et en utilisant la formule d'inversion, on voit que $\widehat{P_\epsilon}(\xi) = e^{-2\pi\epsilon|\xi|}$. Ainsi, $\widehat{P_\epsilon \star \mathcal{H}}f(\xi) = \widehat{P_\epsilon}(\xi)\widehat{\mathcal{H}f}(\xi) = -i\mathrm{sgn}(\xi)e^{-2\pi\epsilon|\xi|}\widehat{f}(\xi)$, ce qui prouve le lemme. □

Lemme 3.2.2. *Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{H}_\epsilon f(x) \leq CMf(x) + M(\mathcal{H}f)(x).$$

Démonstration. - Supposons d'abord que $f \in \mathcal{S}$. Posons $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t^2+1} - \dfrac{1}{t} & \text{si } |t| \geq 1 \\ \dfrac{t}{t^2+1} & \text{si } |t| < 1 \end{cases}$.

Alors $\varphi_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\varphi\left(\frac{t}{\epsilon}\right) = \begin{cases} \frac{t}{t^2+\epsilon^2} - \frac{1}{t} & \text{si } |t| \geq \epsilon \\ \frac{t}{t^2+\epsilon^2} & \text{si } |t| < \epsilon \end{cases}$.

Si $x \in \mathbb{R}$, on a $\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi_\epsilon(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\frac{t}{t^2+\epsilon^2}\ \mathrm{d}t - \int_{|t|>\epsilon} \frac{f(x-t)}{t}\ \mathrm{d}t$.

Ainsi, $\pi\mathcal{H}_\epsilon f(x) = \int_{|t|>\epsilon} \frac{f(x-t)}{t}\ \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\frac{t}{t^2+\epsilon^2}\ \mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi_\epsilon(t)\ \mathrm{d}t$.

On a $|\varphi(x)| \leq \psi(x) := \begin{cases} \frac{1}{|x|(1+x^2)} & \text{si } |x| \geq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$ donc $|\varphi_\epsilon| \leq \psi_\epsilon$.

Or, ψ est positive, paire et décroissante sur $[0,+\infty[$ donc par la proposition (2.4.1) on a :

$$|f \star \varphi_\epsilon(x)| \leq |f| \star \psi_\epsilon(x) \leq \|\psi\|_1 M|f|(x) = \|\psi\|_1 Mf(x).$$

Montrons maintenant que $\left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\frac{t}{t^2+\epsilon^2}\ \mathrm{d}t\right| \leq \pi M(\mathcal{H}f)(x)$.

Posons $\phi(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On a $\|\phi\|_1 = \pi$ et $\phi_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{\epsilon^2+t^2}$.

ϕ est positive, paire et décroissante sur $[0,+\infty[$ donc par la proposition (2.4.1) et le lemme (3.2.1) on a :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\frac{t}{t^2+\epsilon^2}\ \mathrm{d}t\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}f(x-t)\frac{\epsilon}{t^2+\epsilon^2}\ \mathrm{d}t\right| = |\mathcal{H}f \star \phi_\epsilon(x)| \leq \pi M(\mathcal{H}f)(x),$$

ce qui achève la démonstration du lemme lorsque $f \in \mathcal{S}$.

- Soit maintenant $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $(f_n)_n \subset \mathcal{S}$ une suite convergeant dans $L^p(\mathbb{R})$ vers f. Par ce qui précède, on a, pour tout n,

$$\mathcal{H}_\epsilon f_n \leq CMf_n + M(\mathcal{H}f_n) \ \text{ presque partout.} \tag{3.4}$$

Soit $q > 1$ l'exposant conjugué de p. On a, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\mathcal{H}_\epsilon f(x) - \mathcal{H}_\epsilon f_n(x)| = |(f-f_n) \star \frac{1}{\pi y}\chi_{\{|y|>\epsilon\}}| \leq \|f-f_n\|_p \|\frac{1}{\pi y}\chi_{\{|y|>\epsilon\}}\|_q \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par ailleurs, M étant sous-linéaire on a $Mf_n \leq M(f_n - f) + Mf$ et de même, $Mf \leq M(f-f_n) + Mf_n$, de sorte que $|Mf - Mf_n| \leq M(f-f_n)$. M étant de type fort (p,p), on a

$$\|Mf - Mf_n\|_p \leq \|M(f-f_n)\|_p \leq \|M : L^p \to L^p\| \|f-f_n\|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, il existe une sous suite de $(Mf_n)_n$ qui converge presque partout vers Mf.
$\mathcal{H}$ étant de type fort (p,p), on en déduit de même qu'il existe une sous-suite de $(M(\mathcal{H}f_n))_n$ qui converge presque partout vers $M(\mathcal{H}f)$.
Ainsi, en passant à la limite dans l'inégalité (3.4) pour une sous-suite bien choisie, on en déduit que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{H}_\epsilon f(x) \leq CMf(x) + M(\mathcal{H}f)(x),$$

ce qui achève la démonstration du lemme. □

Corollaire 3.2.1. *Soit $1 < p < \infty$. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\|\mathcal{H}_\epsilon : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})\| \leq C.$$

Démonstration. D'après les théorèmes (2.4.1) et (3.2.2), M et $\mathcal{H}$ sont de type fort (p,p) donc par le lemme précédent, la famille $(\mathcal{H}_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est uniformément bornée. □

A l'aide de ce résultat, on va pouvoir démontrer, pour $1 < p < \infty$, la convergence dans $L^p(\mathbb{R})$ des $\mathcal{H}_\epsilon f$ vers $\mathcal{H}f$. On commence par le cas $p = 2$ et on obtiendra les autres cas par interpolation.
Rappelons que, pour $f \in L^p(\mathbb{R})$, on définit $\mathcal{H}_\epsilon f$ par $\mathcal{H}_\epsilon f = f \star \left(\frac{1}{\pi y}\chi_{\{|y|>\epsilon\}}\right)$.
Posons $g_\epsilon(y) = \frac{1}{\pi y}\chi_{\{|y|>\epsilon\}}$. Alors $\widehat{g_\epsilon}$ est la limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de la fonction $\varphi_R(x) = \int_{-R}^{R} g_\epsilon(\xi)e^{-2i\pi\xi x}\mathrm{d}\xi$ lorsque R tend vers $+\infty$. Or, si $\xi \neq 0$ et $R > \epsilon$, on a :

$$\varphi_R(x) = \int_{\epsilon<|y|<R} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{\pi y}\mathrm{d}\xi = \int_{\epsilon<|y|<R} -i\frac{\sin 2\pi y\xi}{\pi y}\mathrm{d}\xi = -2i\mathrm{sgn}(\xi)\frac{1}{\pi}\int_{2\pi\epsilon|\xi|}^{2\pi R|\xi|} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

On obtient donc que $\widehat{g_\epsilon}(\xi) = -2i\mathrm{sgn}(\xi)\frac{1}{\pi}\int_{2\pi\epsilon|\xi|}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Ainsi, $\widehat{g_\epsilon}(\xi)$ tend vers $-i\mathrm{sgn}(\xi)$ lorsque ϵ tend vers 0. De plus, $\widehat{g_\epsilon}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, uniformément en $\epsilon > 0$. Soit A un majorant indépendant de ϵ.
Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\widehat{\mathcal{H}_\epsilon f}(\xi) = \widehat{g_\epsilon}(\xi)\widehat{f}(\xi) \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} -i\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi) = \widehat{\mathcal{H}f}(\xi)$ et $\widehat{\mathcal{H}_\epsilon f} \leq A|\widehat{f}| \in L^2(\mathbb{R})$, donc par convergence dominée, $\widehat{\mathcal{H}_\epsilon f}$ tend vers $\widehat{\mathcal{H}f}$ en norme $\|.\|_2$. La transformée de Fourier-Plancherel étant une isométrie, on en déduit que $\mathcal{H}_\epsilon f$ tend vers $\mathcal{H}f$ dans $L^2(\mathbb{R})$ lorsque $\epsilon \to 0$.

Théorème 3.2.3. *Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, $\mathcal{H}_\epsilon f \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathcal{H}f$ dans $L^p(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Commençons par démontrer ce résultat dans le cas où $f \in \mathcal{S}$. On introduit un réel q tel que $1 < q < p \leq 2$ ou $2 < p < q$ suivant la position de p par rapport à 2. Il existe alors $\theta \in]0,1]$ tel que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{q}$. D'après les théorèmes (3.2.2) et (3.2.1), on a :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}f - \mathcal{H}_\epsilon f\|_p \leq \|\mathcal{H}f - \mathcal{H}_\epsilon f\|_q^{1-\theta}\|\mathcal{H}f - \mathcal{H}_\epsilon f\|_2^{\theta} &\leq (\|\mathcal{H}f\|_q + \|\mathcal{H}_\epsilon f\|_q)^{1-\theta}\|\mathcal{H}f - \mathcal{H}_\epsilon f\|_2^{\theta} \\ &\leq C\|f\|_q^{1-\theta}\|\mathcal{H}f - \mathcal{H}_\epsilon f\|_2^{\theta} \\ &\underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Lorsque $f \in L^p(\mathbb{R})$ est quelconque, on considère une suite $(f_n)_n \subset \mathcal{S}$ qui converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$. Par inégalité triangulaire on a :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}f - \mathcal{H}_\epsilon f\|_p &\leq \|\mathcal{H}f - \mathcal{H}f_n\|_p + \|\mathcal{H}f_n - \mathcal{H}_\epsilon f_n\|_p + \|\mathcal{H}_\epsilon f_n - \mathcal{H}_\epsilon f\|_p \\ &\leq C_p\|f - f_n\|_p + \|\mathcal{H}f_n - \mathcal{H}_\epsilon f_n\|_p + C\|f_n - f\|_p\end{aligned}$$

et cette dernière quantité peut être rendue aussi petite que l'on veut lorsque n est assez grand et ϵ assez proche de 0. □

Théorème 3.2.4. *Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, $\mathcal{H}_\epsilon f(x) \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathcal{H}f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. On a vu dans la première section de ce chapitre que cette limite a lieu lorsque $f \in \mathcal{S}$. Par le lemme (3.2.2), l'opérateur maximal $\mathcal{H}^*$ associé à la famille $(\mathcal{H}_\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*}$ est de type fort (p,p). On peut alors appliquer le théorème (2.1.1) avec $T = \mathcal{H}$, et on en déduit que pour tout $f \in \overline{\mathcal{S}}^{\|\cdot\|_p} = L^p(\mathbb{R})$, $\mathcal{H}_\epsilon f \underset{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon \in \mathbb{Q}_+^*}}{\longrightarrow} \mathcal{H} f$ presque partout.

Montrons maintenant que $\mathcal{H}_\epsilon f \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \mathcal{H} f$ presque partout. Pour cela, commençons par montrer que pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\varphi : \epsilon > 0 \mapsto \mathcal{H}_\epsilon f(x)$ est continue. Soit pour $\epsilon, \epsilon' > 0$ tels que $\epsilon < \epsilon'$. Soit q l'exposant conjugué de p. On a :

$$\pi|\varphi(\epsilon) - \varphi(\epsilon')| = \left| \int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y} \, \mathrm{d}y - \int_{|y|>\epsilon'} \frac{f(x-y)}{y} \, \mathrm{d}y \right| = \left| \int_{\epsilon<|y|<\epsilon'} \frac{f(x-y)}{y} \, \mathrm{d}y \right|$$
$$\leq \|f\|_p \|\frac{1}{y} \chi_{\{\epsilon<|y|<\epsilon'\}}\|_q,$$

et cette dernière quantité tend vers 0 lorsque $\epsilon \to \epsilon'$ ou $\epsilon' \to \epsilon$. D'où la continuité de φ.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{H}_\epsilon f(x) \to \mathcal{H} f(x)$ lorsque $\epsilon \to 0$, $\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Soit $\alpha > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, $0 < \epsilon < \eta, |\mathcal{H} f(x) - \mathcal{H}_\epsilon f(x)| < \alpha$. Soit maintenant $\epsilon \in \mathbb{R}, 0 < \epsilon < \eta$. Par continuité de la fonction φ, il existe $r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \eta$ tel que $|\mathcal{H}_r f(x) - \mathcal{H}_\epsilon f(x)| \leq \alpha$. On a alors

$$|\mathcal{H} f(x) - \mathcal{H}_\epsilon f(x)| \leq |\mathcal{H} f(x) - \mathcal{H}_r f(x)| + |\mathcal{H}_r f(x) - \mathcal{H}_\epsilon f(x)| < 2\alpha,$$

ce qui prouve que $\mathcal{H}_\epsilon f(x) \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \mathcal{H} f(x)$ et achève la démonstration du théorème. $\square$

Remarque 3.2.2. *On peut démontrer que ce théorème est également vrai lorsque $p = 1$.*

3.2.3 Une autre démonstration du théorème de Riesz

Une autre preuve du théorème (3.2.2) est basée sur le théorème d'interpolation suivant :

Théorème 3.2.5. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés $\sigma-$finis, et T une application linéaire définie sur les fonctions étagées mesurables sur $(X, \mathcal{A})$ à valeurs dans les fonctions $\mathcal{B}-$mesurables. On suppose que*
i) il existe $q \in [1, 2[$ tel que l'ont ait $\|T\chi_A\|_{L^q(\nu)} \leq \|\chi_A\|_{L^q(\mu)}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \infty$,
ii) pour toute fonction étagée f, $\|Tf\|_{L^2(\nu)} \leq \|f\|_{L^2(\mu)}$.

Alors, pour tout $p \in]q, 2[$, il existe une constante C_p telle que, pour toute fonction étagée, on ait

$$\|Tf\|_{L^p(\nu)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

En conséquence, pour tout $p \in]q, 2[$, l'application T se prolonge en une application linéaire et continue de $L^p(\mu)$ dans $L^p(\nu)$.

La preuve de ce résultat est semblable à celle du théorème de Marcinkiewcz, en utilisant de plus une inégalité intégrale de Hardy.
Il s'agit alors de prouver que $\mathcal{H}$ (ou plus exactement $\lambda\mathcal{H}$ pour un λ bien choisi) vérifie les hypothèses du théorème précédent pour tout $q \in]1, 2[$, ce qui démontrera le théorème de Riesz sur $L^p(\mathbb{R})$ pour

$1 < p < 2$. On a déjà vu que $\mathcal{H}$ vérifiait l'hypothèse $ii)$ et il reste donc à démontrer $i)$. Pour cela, le point de départ est la remarque (3.2.1) qui affirme que si $a < b$, $\mathcal{H}\chi_{[a,b]} = \dfrac{1}{\pi}\log\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|$. On en déduit l'expression de $\mathcal{H}\chi_E$ lorsque E est une réunion finie d'intervalles compacts et disjoints, et en résolvant une équation polynomiale, on montre que, pour tout $t > 0$,

$$|\{x \in \mathbb{R} : |\pi\mathcal{H}\chi_E(x)| > t\}| = \frac{2|E|}{\sinh t}.$$

En utilisant la régularité de la mesure de Lebesgue, on démontre ensuite que l'égalité précédente est valable pour tout ensemble mesurable E de mesure finie. Enfin, à l'aide de la formule $\|f\|_p^p = p\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{p-1}a_f(t)\,\mathrm{d}t$, on en déduit que pour tout $1 < p < \infty$,

$$\|\mathcal{H}\chi_E\|_p = c_p|E|^{1/p}$$

où $c_p^p = \dfrac{2p}{\pi^p}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{\sinh t}\,\mathrm{d}t$.

On peut maintenant appliquer le théorème (3.2.5), ce qui démontre le théorème de Riesz.

3.3 Par l'analyse complexe

3.3.1 Théorème de Riesz sur $\mathbb{T}$

Dans cette partie on va démontrer que la suite $h := (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie au début de ce chapitre est un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{T})$. Pour ce faire, on va remarquer que, pour $f \in \mathcal{P}$ réelle, f se prolonge au disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ en une fonction harmonique u à l'aide du noyau de Poisson et considérer la fonction conjuguée harmonique v de u (ie v est réelle, s'annule en 0 et est telle que $u + iv$ soit holomorphe). On prouvera alors le résultat en appliquant la formule de Cauchy à une fonction holomorphe appropriée.
Pour $0 \le r < 1$ et $t \in \mathbb{R}$ posons :

$$P_r(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int} \text{ et } Q_r(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -i\ \mathrm{sgn}(n)r^{|n|}e^{int}.$$

Puisque $0 \le r < 1$, ces deux sommes sont bien définies car absolument convergentes. On a vu dans le premier chapitre que $P_r(t) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}$, et par des calculs similaires, on obtient $Q_r(t) = \dfrac{2r\sin(t)}{1-2r\cos(t)+r^2}$.

On remarque en particulier que P_r et Q_r sont à valeurs réelles.

En notant $z = re^{i\theta}, 0 \le r < 1, \theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = \frac{(e^{it}+z)(e^{-it}-\overline{z})}{(e^{it}+z)(e^{-it}-\overline{z})} = \frac{1-r^2+2ir\sin(\theta-t)}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} = P_r(\theta-t) + iQ_r(\theta-t).$$

Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ on note $u(z) = P_r \star f(\theta) = \displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$ et $v(z) = Q_r \star f(\theta)$.
Si f est réelle alors u définit sur $\mathbb{D}$ une fonction harmonique car elle est, d'après le calcul précédent, la partie réelle de la fonction $F : z \in \mathbb{D} \longmapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} f(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{D}$. De plus, sa fonction conjuguée harmonique est donnée par $v(z) = Q_r \star f(\theta)$.

Pour $0 \leq r < 1$ posons $u_r(t) = u(re^{it})$ et $v_r(t) = v(re^{it})$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $\widehat{u_r}(k) = \widehat{P_r}(k)\widehat{f}(k) = r^{|k|}\widehat{f}(k)$ et $\widehat{v_r}(k) = -i \operatorname{sgn}(k) r^{|k|} \widehat{f}(k)$. Ainsi, si $f = P = \sum_k \widehat{P}(k) e_k \in \mathcal{P}$ on a $u_r(t) = \sum_k r^{|k|} \widehat{P}(k) e_k$ et $v_r(t) = \sum_k -i \operatorname{sgn}(k) r^{|k|} \widehat{P}(k) e_k$ de sorte que u_r et v_r convergent simplement, lorsque $r \to 1$, respectivement vers P et $\sum_k h_k \widehat{P}(k) e_k = \mathcal{H}P$.

Lemme 3.3.1. *Si $a, b \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ sont tels que $2a^{2k} \leq (a+b)^{2k}$ alors $a \leq 4kb$.*

Démonstration. Considérons la fonction $f : x > 0 \longmapsto (1+x)^{2k}$. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie $f\left(\frac{1}{4k}\right) < 2$. En effet, l'inégalité $\ln(1+y) \leq y$ valable pour $y > -1$ donne :

$$f\left(\frac{1}{4k}\right) = \left(1 + \frac{1}{4k}\right)^{2k} = e^{2k \ln\left(1 + \frac{1}{4k}\right)} \leq e^{\frac{1}{2}} < 2.$$

Si $a = 0$ le résultat est clair et si $b = 0$ alors nécessairement $a = 0$.
Si a et b sont non nuls on a $\dfrac{b}{a} > 0$ et par hypothèse $f\left(\frac{b}{a}\right) = \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{2k} = \dfrac{1}{a^{2k}}(a+b)^{2k} \geq 2$.
Ainsi, $f(\frac{b}{a}) \geq f(\frac{1}{4k})$ donc par croissance de f on a $\dfrac{b}{a} \geq \dfrac{1}{4k}$, ou encore $a \leq 4kb$.

□

On est maintenant en mesure de démontrer le résultat souhaité :

Théorème 3.3.1. *Pour $1 < p < \infty$, $h = (h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{T})$.*

Démonstration. On va utiliser la caractérisation donnée au lemme (1.1.1), c'est-à-dire montrer que $\mathcal{H}$ définit une application linéaire bornée de $\mathcal{P} \cap L^p(\mathbb{T})$ dans lui-même. Montrons le résultat pour $p = 2k, k \in \mathbb{N}^*$, puis raisonnons par interpolation et dualité comme dans la preuve du théorème de Riesz (3.2.2). Soit $f \in L^p$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons f à valeurs réelles et telle que $\widehat{f}(0) = 0$. Considérons $F = u + iv$ où u et v sont les fonctions définies précédemment. Démontrons l'inégalité

$$\left(\int_0^{2\pi} v_r(t)^{2k}\, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2k}} \leq C_k \left(\int_0^{2\pi} u_r(t)^{2k}\, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2k}} \tag{3.5}$$

où C_k est une constante ne dépendant que de k. On appliquera ensuite cette inégalité aux parties réelles et imaginaires d'un élément de $\mathcal{P}$ puis on passera à la limite lorsque $r \to 1$ pour aboutir au résultat.

Puisque F est holomorphe sur $\mathbb{D}$, F^{2k} l'est également donc la formule de Cauchy donne, pour $0 < r < 1$, l'égalité

$$F(0)^{2k} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \frac{F(z)^{2k}}{z}\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(re^{it})^{2k}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (u_r(t) + iv_r(t))^{2k}\, \mathrm{d}t.$$

Par hypothèse, on a $F(0) = \widehat{f}(0) = 0$. En appliquant la formule du binôme de Newton dans le dernier membre de l'égalité précédente on a alors :

$$0 = \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} u_r(t)^j i^{2k-j} v_r(t)^{2k-j} \, \mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} (-1)^k i^{-j} \int_0^{2\pi} u_r(t)^j v_r(t)^{2k-j} \, \mathrm{d}t.$$

f étant à valeurs réelles, les fonctions u_r et v_r le sont également, donc prendre la partie réelle du membre de droite revient à ne garder que les indices j pairs, ce qui donne :

$$0 = \sum_{j=0}^{k} \binom{2k}{2j} (-1)^{k-j} \int_0^{2\pi} u_r(t)^{2j} v_r(t)^{2k-2j} \, \mathrm{d}t.$$

En utilisant la positivité des fonctions u_r^{2j} et v_r^{2k-2j} on obtient alors l'inégalité

$$\int_0^{2\pi} v_r(t)^{2k} \, \mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{k} \binom{2k}{2j} -(-1)^{k-j} \int_0^{2\pi} u_r(t)^{2j} v_r(t)^{2k-2j} \, \mathrm{d}t \leq \sum_{j=1}^{k} \binom{2k}{2j} \int_0^{2\pi} u_r(t)^{2j} v_r(t)^{2k-2j} \, \mathrm{d}t.$$

Pour $j \in [\![1, k]\!]$, on applique dans le dernier membre de l'inégalité précédente l'inégalité de Hölder à u_r^{2j} et v_r^{2k-2j} avec les exposants $p = \dfrac{k}{j}$ et $p' = \dfrac{k}{k-j}$ et on obtient :

$$\|v_r\|_{2k}^{2k} \leq \sum_{j=1}^{k} \binom{2k}{2j} \|u_r\|_{2k}^{2j} \|v_r\|_{2k}^{2k-2j}.$$

En utilisant, pour $x, y \in \mathbb{R}_+$, l'égalité $(x+y)^{2k} + (x-y)^{2k} = 2\sum_{j=0}^{k} \binom{2k}{2j} x^{2j} y^{2k-2j}$ et l'inégalité $(x-y)^{2k} \leq (x+y)^{2k}$ on obtient :

$$\begin{aligned} 2\|v_r\|_{2k}^{2k} \leq \sum_{j=0}^{k} \binom{2k}{2j} \|u_r\|_{2k}^{2j} \|v_r\|_{2k}^{2k-2j} &= \frac{1}{2} \left((\|u_r\|_{2k} + \|v_r\|_{2k})^{2k} + (\|u_r\|_{2k} - \|v_r\|_{2k})^{2k} \right) \\ &\leq (\|u_r\|_{2k} + \|v_r\|_{2k})^{2k}. \end{aligned}$$

Le lemme (3.3.1) appliqué à $a = \|v_r\|_{2k}$ et $b = \|u_r\|_{2k}$ donne alors l'inégalité (3.5) avec $C_k = 4k$.

Soit $P \in \mathcal{P}$. Posons $Q = P - \widehat{P}(0)$, de sorte que $\widehat{Q}(0) = 0$, et définissons comme précédemment $u(re^{i\theta}) = P_r \star Q(\theta)$ et $v(re^{i\theta}) = Q_r \star Q(\theta)$. P_r et Q_r étant à valeurs réelles, on a $\operatorname{Re} u = P_r \star \operatorname{Re} Q$, $\operatorname{Im} u = P_r \star \operatorname{Im} Q, \operatorname{Re} v = Q_r \star \operatorname{Re} Q$ et $\operatorname{Im} v = Q_r \star \operatorname{Im} Q$. Les fonctions $\operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Re} v + i \operatorname{Im} v$ sont holomorphes sur $\mathbb{D}$ et s'annulent en 0 donc par l'inégalité (3.5) on a, pour tout $0 < r < 1$:

$$\left(\int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} v(re^{it}))^{2k} \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2k}} \leq C_k \left(\int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} u(re^{it}))^{2k} \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2k}} \leq C_k \left(\int_0^{2\pi} |u_r(t)|^{2k} \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2k}}$$

$$\text{et} \quad \left(\int_0^{2\pi} (\operatorname{Im} v(re^{it}))^{2k} \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2k}} \leq C_k \left(\int_0^{2\pi} (\operatorname{Im} u(re^{it}))^{2k} \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2k}} \leq C_k \left(\int_0^{2\pi} |u_r(t)|^{2k} \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2k}}.$$

Ainsi, $\|v_r\|_{2k} = \|\operatorname{Re} v_r + i \operatorname{Im} v_r\|_{2k} \leq \|\operatorname{Re} v_r\|_{2k} + \|\operatorname{Im} v_r\|_{2k} \leq 2C_k\|u_r\|_{2k}$.
Or, par convergence dominée, lorsque $r \to 1$, le membre de gauche tend vers $\|\mathcal{H}Q\|_{2k}$ et celui de droite vers $\|Q\|_{2k}$, ce qui entraîne que $\|\mathcal{H}Q\|_{2k} \leq 2C_k\|Q\|_{2k}$. Puisque $\mathcal{H}(\widehat{P}(0)) = 0$ on a $\mathcal{H}P = \mathcal{H}Q$ et on en déduit que

$$\|\mathcal{H}P\|_{2k} \leq \|\mathcal{H}Q\|_{2k} \leq 2C_k\|Q\|_{2k} \leq 2C_k(\|P\|_{2k} + |\widehat{P}(0)|) \leq 4C_k\|P\|_{2k},$$

ce qui permet d'affirmer que h est un multiplicateur de Fourier sur $L^{2k}(\mathbb{T})$.

Soit $2 \leq p \leq \infty$. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $2k \leq p \leq 2(k+1)$ et par le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, $\mathcal{H}$ définit alors une application linéaire bornée de $L^p(\mathbb{T})$ dans lui-même, donc h est un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{T})$. Pour traiter le cas $1 < p < 2$, on procède par dualité comme au théorème (3.2.2).

□

3.3.2 Méthode de Cotlar

Comme dans la section précédente, on va démontrer le théorème de Riesz sur $\mathbb{T}$. On va procéder par récurrence : le théorème est clair si $p = 2$ car la suite h est bornée et s'il est vrai pour $p \in \mathbb{N}^*$ on va prouver qu'il l'est également au rang $2p$. On conclura alors grâce au théorème d'interpolation de Riesz-Thorin et par dualité, comme au théorème (3.3.1). Le point crucial est donc le passage du rang p au rang $2p$ et c'est la formule suivante, appelée formule de Cotlar, qui permet ce passage :

Lemme 3.3.2 (Formule de Cotlar)**.** *Soit $P \in \mathcal{P}$ tel que $\widehat{P}(0) = 0$. Alors*

$$(\mathcal{H}P)^2 = P^2 + 2\mathcal{H}(P.\mathcal{H}P).$$

Démonstration. Soit $P \in \mathcal{P}$ un polynôme réel tel que $\widehat{P}(0) = 0$. Pour $0 \leq r < 1$, on définit comme précédemment $u_r(t) = P_r \star P(t)$, $v_r(t) = Q_r \star P(t)$ et $F(re^{it}) = u_r(t) + iv_r(t)$. F est holomorphe sur $\mathbb{D}$ donc F^2 l'est également. Or, $F^2(re^{it}) = u_r^2(t) - v_r^2(t) + 2iu_r(t)v_r(t)$, et puisque $u_r^2 - v_r^2$ et $2u_rv_r$ sont à valeurs réelles et que $u_0(0)v_0(0) = 0$, $2u_rv_r$ est le conjugué harmonique de $u_r^2 - v_r^2$. Alors $\mathcal{H}(u_r^2 - v_r^2) = 2u_rv_r$ et en passant à la limite lorsque $r \to 1$, on trouve que $\mathcal{H}(P^2 - (\mathcal{H}P)^2) = 2P.\mathcal{H}P$ car u_r et v_r convergent respectivement vers P et $\mathcal{H}P$.

Puisque $\widehat{P}(0) = 0$, on peut écrire P sous la forme $P = \sum_{n\neq 0} a_n e_n$. On a alors $P^2 = \sum\limits_{n,m\neq 0} a_n a_m e_{n+m}$ donc $\widehat{P^2}(0) = \sum\limits_{\substack{n+m=0\\ n,m\neq 0}} a_n a_m$. De même, puisque $\mathcal{H}P = \sum_{n\neq 0} -i\mathrm{sgn}(n) a_n e_n$, on trouve $\widehat{(\mathcal{H}P)^2}(0) = \sum\limits_{\substack{n+m=0\\ n,m\neq 0}} -\mathrm{sgn}(n)\mathrm{sgn}(m) a_n a_m = \sum\limits_{\substack{n+m=0\\ n,m\neq 0}} a_n a_m$ car n et m sont de signe opposé et non nuls. On en déduit que $(P^2 - (\mathcal{H}P)^2)\widehat{\ }(0) = 0$. En appliquant $\mathcal{H}$ à l'égalité $\mathcal{H}(P^2 - (\mathcal{H}P)^2) = 2P.\mathcal{H}P$, on obtient alors, par la proposition (3.1.2), $(\mathcal{H}Q)^2 - P^2 = 2\mathcal{H}(P.\mathcal{H}P)$. Ceci démontre la formule de Cotlar dans le cas où P est réel.

Soit maintenant $P \in \mathcal{P}$ tel que $\widehat{P}(0) = 0$. Notons Q et R les parties réelle et imaginaire de P. On a $P^2 = (Q + iR)^2 = Q^2 - R^2 + 2iQR$ et $(\mathcal{H}P)^2 = (\mathcal{H}Q + i\mathcal{H}R)^2 = (\mathcal{H}Q)^2 - (\mathcal{H}R)^2 + 2i\mathcal{H}Q.\mathcal{H}R$.

Ainsi, par ce qui précède,

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}P)^2 - P^2 &= ((\mathcal{H}Q)^2 - Q^2) - ((\mathcal{H}R)^2 - R^2) + 2i(\mathcal{H}Q.\mathcal{H}R - QR)\\ &= 2\mathcal{H}(Q.\mathcal{H}Q) - 2\mathcal{H}(R.\mathcal{H}R) + 2i(\mathcal{H}Q.\mathcal{H}R - QR)\end{aligned}$$

et puisque $P.\mathcal{H}P = Q.\mathcal{H}\mathcal{Q} - R.\mathcal{H}R + i(Q.\mathcal{H}R + R.\mathcal{H}Q)$, on a :

$$2\mathcal{H}(P.\mathcal{H}P) = 2\mathcal{H}(Q.\mathcal{H}Q) - 2\mathcal{H}(R.\mathcal{H}R) + 2i(\mathcal{H}(Q.\mathcal{H}R) + \mathcal{H}(R.\mathcal{H}Q)).$$

Pour démontrer le lemme, il reste donc à prouver que $\mathcal{H}Q.\mathcal{H}R - QR = \mathcal{H}(Q.\mathcal{H}R) + \mathcal{H}(R.\mathcal{H}Q)$. Posons $\varphi(Q, R) = \mathcal{H}Q.\mathcal{H}R - QR$ et $\psi(Q, R) = \mathcal{H}(Q.\mathcal{H}R) + \mathcal{H}(R.\mathcal{H}Q)$. Alors φ et ψ sont des formes bilinéaires symétriques sur $\mathcal{P}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ où $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble des polynômes trigonométriques réels. Pour $T \in \mathcal{P}$ on a

$$\varphi(T, T) = (\mathcal{H}T)^2 - T^2 = 2\mathcal{H}(T.\mathcal{H}T) = \psi(T, T).$$

Les formes quadratiques associées à φ et ψ sont égales donc par les formules de polarisation on a $\varphi = \psi$. Ceci achève la démonstration de la formule de Cotlar. $\square$

Lemme 3.3.3. *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ tels que $a^2 \leq b^2 + 2abc$. Alors $a \leq (c + \sqrt{1 + c^2})b$.*

Démonstration. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 - 2bcx - b^2$. Le discriminant de P étant égal à $4b^2c^2 + 4b^2 = 4b^2(1 + c^2) \geq 0$, P admet sur $\mathbb{R}$ deux racines, éventuellement égales. De plus, P est négatif sur l'intervalle d'extrémités ses racines et positif à l'extérieur de cet intervalle. Comme par hypothèse $P(a) \leq 0$, a est nécessairement inférieur à la plus grande des racines de P. Celle-ci étant égale à $\dfrac{2bc + \sqrt{4b^2(1 + c^2)}}{2} = b(c + \sqrt{1 + c^2})$, on en déduit le résultat. $\square$

Théorème 3.3.2. *Pour $1 < p < \infty$, $h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{T})$.*

Démonstration. Par ce qui a été dit au début de cette section, il suffit de montrer que si h est un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{T})$ alors h est un multiplicateur de Fourier sur $L^{2p}(\mathbb{T})$. Posons $C_p = \|\mathcal{H}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))}$ et soit $P \in \mathcal{P}$ tel que $\widehat{P}(0) = 0$. Par le lemme (3.3.2) on a $(\mathcal{H}P)^2 = P^2 + 2\mathcal{H}(P.\mathcal{H}P))$ donc

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}P\|_{2p}^2 = \|(\mathcal{H}P)^2\|_p = \|P^2 + 2\mathcal{H}(P.\mathcal{H}P))\|_p &\leq \|P^2\|_p + 2\|\mathcal{H}(P.\mathcal{H}P))\|_p\\ &\leq \|P\|_{2p}^2 + 2C_p\|P.\mathcal{H}P\|_p\\ &\leq \|P\|_{2p}^2 + 2C_p\|P\|_{2p}\|\mathcal{H}P\|_{2p},\end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
En appliquant le lemme précédent avec $a = \|\mathcal{H}P\|_{2p}$, $b = \|P\|_{2k}$ et $c = C_p$ on obtient que

$$\|\mathcal{H}P\|_{2p} \leq \left(C_p + \sqrt{1 + C_p^2}\right)\|P\|_{2p}.$$

Si $P \in \mathcal{P}$ ne satisfait pas $\widehat{P}(0) = 0$ on remplace P par $P - \widehat{P}(0)$ dans l'inégalité précédente, et compte-tenu du fait que $\mathcal{H}(P - \widehat{P}(0)) = \mathcal{H}P$ et $|\widehat{P}(0)| \leq \|P\|_1 \leq \|P\|_{2k}$ on obtient :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}P\|_{2p} = \|\mathcal{H}(P - \widehat{P}(0))\|_{2p} &\leq \left(C_p + \sqrt{1 + C_p^2}\right)\|P - \widehat{P}(0)\|_{2p}\\ &\leq \left(C_p + \sqrt{1 + C_p^2}\right)(\|P\|_{2p} + \|\widehat{P}(0)\|_{2p})\\ &\leq 2\left(C_p + \sqrt{1 + C_p^2}\right)\|P\|_{2p}.\end{aligned}$$

Ceci prouve, d'après le lemme (1.1.1), que h est un multiplicateur de Fourier sur $L^{2p}(\mathbb{T})$.

□

3.3.3 Convergence en norme, convergence ponctuelle

Par des méthodes similaires à celles employées pour l'étude de la transformée de Hilbert sur $\mathbb{R}$, on peut exprimer la transformée de Hilbert sur $\mathbb{T}$ comme intégrale singulière. On pose, pour $\epsilon > 0$,

$$k_\epsilon = \begin{cases} \cot(\frac{t}{2}) & \text{si } \epsilon \leq |t| \leq \pi \\ 0 & \text{si } |t| < \epsilon \end{cases}.$$

On démontre alors que pour tout $f \in L^p(\mathbb{T}), 1 < p < \infty$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} f \star k_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon \leq |t| \leq \pi} f(x-y) \cot\left(\frac{y}{2}\right) \frac{\mathrm{d}y}{2\pi} = \mathcal{H}f(x) \text{ pour presque tout } x$$

et

$$\lim_{\epsilon \to 0} f \star k_\epsilon = \mathcal{H}f \text{ dans } L^p(\mathbb{T}).$$

Remarque 3.3.1. *Le choix de la famille $(k_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est justifié, entre autres, par le fait que $\widehat{k_\epsilon}(n) \to -i\mathrm{sgn}(n)$ lorsque $\epsilon \to 0$.*

3.4 Quelques conséquences

On considère dans cette section un réel $p \in]1, \infty[$. A partir des théorèmes de Riesz sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{T}$, on va construire une famille de multiplicateurs uniformément bornés sur L^p, celle des indicatrices des intervalles $]a, b[, -\infty \leq a < b \leq \infty$.

On définit, pour $a \in \mathbb{R}$ et $f \in L^p(\mathbb{R}), M_a f = e^{2i\pi a \cdot} f$. Posons $g_a = \chi_{[a,+\infty[}$ et montrons que, sur $L^2(\mathbb{R})$,

$$T_{g_a} = \frac{1}{2} M_a(\mathrm{Id} + i\mathcal{H})M_{-a}. \tag{3.6}$$

Si $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}$ on a, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{M_b g}(\xi) = \widehat{g}(\xi - b)$. Ainsi, pour $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}(M_a(\mathrm{Id} + i\mathcal{H})M_{-a}f)\widehat{}(\xi) = ((\mathrm{Id} + i\mathcal{H})M_{-a}f)\widehat{}(\xi - a) &= (1 + \mathrm{sgn}(\xi - a))\widehat{M_{-a}f}(\xi - a) \\ &= 2\chi_{[a,+\infty[}\widehat{f}(\xi) \\ &= 2\widehat{T_{g_a}f}(\xi).\end{aligned}$$

Ceci démontre l'égalité (3.6).

Puisque M_b est une isométrie de $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $b \in \mathbb{R}$ et que $\mathcal{H}$ est bornée sur $L^p(\mathbb{R})$, on en déduit que g_a est un multiplicateur de Fourier. De plus, la norme de T_{g_a} est indépendante de a donc la famille $(T_{g_a})_{a\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}))$ est uniformément bornée.

On montre de même que pour $b \in \mathbb{R}, h_b := \chi_{]-\infty,b[}$ est un multiplicateur de Fourier et que la famille $(T_{h_b})_{b\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}))$ est uniformément bornée.

Enfin, pour $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, on prouve comme ci-dessus l'égalité

$$T_{\chi_{]a,b[}} = \frac{i}{2}(M_a \mathcal{H} M_{-a} - M_b \mathcal{H} M_{-b}).$$

Ainsi, la fonction indicatrice $\chi_{]a,b[}$ définit un multiplicateur sur $L^p(\mathbb{R})$ et la norme de $T_{\chi_{]a,b[}}$ est indépendante de a et b.

Notons, pour $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $S_{a,b}$ l'opérateur associé au multiplicateur $\chi_{]a,b[}$. On a alors démontré le résultat suivant :

Proposition 3.4.1. *Il existe une constante C_p, $1 < p < \infty$, telle que pour tout a et b, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, et pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$,*

$$\|S_{a,b} f\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

Sur $L^p(\mathbb{T})$, on montre de même que pour $a, b \in \overline{\mathbb{N}}, a < b$, la suite $k_{a,b}$ définie par $k_{a,b}(n) = 1$ si $n \in [\![a, b]\!]$ (avec éventuellement $a < n$ ou $n < b$ si a ou b sont égaux à $\pm\infty$) et $k_{a,b}(n) = 0$ sinon, est un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{T})$. De plus, l'opérateur $T_{k_{a,b}}$ associé, qu'on notera $S_{a,b}$, a une norme indépendante de a et b.

Proposition 3.4.2. *Il existe une constante C_p, $1 < p < \infty$, telle que pour tout $a, b \in \overline{\mathbb{N}}, a < b$, et pour tout $f \in L^p(\mathbb{T})$,*

$$\|S_{a,b} f\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

Pour $N \in \mathbb{N}$ et $f \in L^p(\mathbb{T})$, $S_N f := S_{-N,N} f$ est la $N-$ème somme partielle de la série de Fourier de f. D'après la proposition précédente on a alors :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \|S_N f\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

De ceci, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3.4.1. *Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, alors*

$$\lim_{N \to +\infty} \|S_N f - f\|_p = 0.$$

Démonstration. Le théorème est vrai pour un élément $P \in \mathcal{P}$ puisque $S_N P = P$ pour $N \geq \deg P$. Soit $\epsilon > 0$ et $f \in L^p(\mathbb{T})$. Par densité de $\mathcal{P}$ dans L^p, il existe $P \in \mathcal{P}$ tel que $\|f - P\|_p \leq \epsilon$. Ainsi, pour $N \geq \deg P$, on a :

$$\begin{aligned} \|S_N f - f\|_p \leq \|S_N(f-P)\|_p + \|S_N P - P\|_p + \|P - f\|_p &= \|S_N(f-P)\|_p + \|P - f\|_p \\ &\leq (C_p + 1)\epsilon. \end{aligned}$$

□

Enfin, ce qui précède permet de démontrer les résultats suivants, appelés théorèmes de Stechkin.

Théorème 3.4.1. *Soit m une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée intégrable. Alors m est un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.*

Démonstration. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a $m(x) - m(y) = \displaystyle\int_y^x m'(t)\mathrm{d}t$. Puisque m' est intégrable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que m admet une limite finie en $-\infty$, et quitte à ajouter une constante à m, on peut supposer que cette limite est nulle. Ainsi, en passant à la limite lorsque $y \to -\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient que $m(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x m'(t)\mathrm{d}t$. On peut alors écrire :

$$m(x) = \int_{-\infty}^x m'(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \chi_{]-\infty,x[}(t)m'(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \chi_{]t,+\infty[}(x)m'(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi, si $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\widehat{T_m f}(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{]t,+\infty[}(\xi)\widehat{f}(\xi)m'(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \widehat{S_{t,+\infty}f}(\xi)m'(t)\mathrm{d}t.$$

Posons $g = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} S_{t,+\infty}f\ m'(t)\mathrm{d}t$ et montrons que $T_m f = g$. Pour cela, commençons par prouver que g est bien définie.

La fonction $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto S_{t,+\infty}f\ m'(t) \in L^2(\mathbb{R})$ est continue car si $t, t' \in \mathbb{R}$, $t < t'$, on a :

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t) - \varphi(t')\|_2 &= \|\widehat{\varphi(t)} - \widehat{\varphi(t')}\|_2 \\
&\leq \|\chi_{]t,\infty[}\widehat{f}m'(t) - \chi_{]t',\infty[}\widehat{f}m'(t)\|_2 + \|\chi_{]t',\infty[}\widehat{f}m'(t) - \chi_{]t',\infty[}\widehat{f}m'(t')\|_2 \\
&\leq |m'(t)|\|\chi_{]t,t'[}\widehat{f}\|_2 + |m'(t) - m'(t')|\|\widehat{f}\|_2
\end{aligned}$$

et ce dernier terme tend vers 0 quand $t \to t'$ (ou lorsque $t' \to t$) car $|\widehat{f}|^2$ est intégrable et m' est continue.
De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} \|S_{t,+\infty}f\ m'(t)\|_2\ \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \|\widehat{S_{t,+\infty}f}\|_2|m'(t)|\ \mathrm{d}t \leq \|f\|_2\|m'\|_1 < +\infty.$$

Ceci montre que g est bien définie et dans $L^2(\mathbb{R})$. Pour voir que $g = T_m f$, il suffit de prouver que g et $T_m f$ ont même transformée de Fourier-Plancherel. Or, cette dernière est linéaire et continue de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même donc on a :

$$\widehat{g} = \int_{\mathbb{R}} (S_{t,+\infty}f\ m'(t))\widehat{\ }\ \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \widehat{S_{t,+\infty}f}m'(t)\ \mathrm{d}t = \widehat{T_m f}.$$

Pour montrer que m est un multiplicateur, on considère maintenant un élément $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$. Alors $T_m f \in L^p(\mathbb{R})$ d'après l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}} \|S_{t,+\infty}f\ m'(t)\|_p\ \mathrm{d}t \leq C_p\|f\|_p \int_{\mathbb{R}} |m'(t)|\mathrm{d}t < +\infty.$$

Ainsi, par l'inégalité de Minkowski, on obtient :

$$\|T_m f\|_p \leq \int_{\mathbb{R}} \|S_{t,+\infty}f\ m'(t)\|_p\ \mathrm{d}t \leq C_p\|f\|_p \int_{\mathbb{R}} |m'(t)|\mathrm{d}t < +\infty,$$

ce qui prouve que m est un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{R})$. $\square$

Remarque 3.4.1. *Par un raisonnement similaire, on peut démontrer que toute fonction à variation bornée sur* $\mathbb{R}$ *est un multiplicateur de Fourier sur* $L^p(\mathbb{R})$*, pour* $1 < p < \infty$*.*

Théorème 3.4.2. *Soit* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in L^\infty_\mathbb{Z}$ *une suite à variations bornées. Alors pour tout* $1 < p < \infty$*,* a *est un multiplicateur de Fourier sur* $L^p(\mathbb{T})$*.*

Démonstration. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=N}^{M} b_k e_k \in \mathcal{P}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note $T_k = S_{k,\infty}$. Posons de plus $A = \sum_k |a_k - a_{k-1}| < \infty$. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{M} a_k b_k e_k = \sum_{k=N}^{M} a_k (T_k P - T_{k+1} P) &= \sum_{k=N}^{M} a_k T_k P + \sum_{k=N+1}^{M+1} a_{k-1} T_k P \\ &= a_N T_N P + a_M T_{M+1} P + \sum_{k=N+1}^{M} (a_k - a_{k-1}) T_k P.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{k=N}^{M} a_k b_k e_k \right\|_p &\leq |a_N| \|T_N P\|_p + |a_M| \|T_{M+1} P\|_p + \sum_{k=N+1}^{M} |a_k - a_{k-1}| \|T_k P\|_p \\ &\leq C_p (2\|a\|_\infty + A) \|P\|_p.\end{aligned}$$

Par le lemme (1.1.1), on en déduit que a est un multiplicateur de Fourier sur $L^p(\mathbb{T})$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, American Mathematical Society, 2001.

[2] E. M. Stein et G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton, 1975.

[3] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 3ème édition, 2009.

[4] J. Peyrière, *Convolution, séries et intégrales de Fourier*, Ellipses, 2012.

[5] J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Springer, 2007.

[6] R. E. Edwards et G. I. Gaudry, *Littlewood-Paley and Multiplier Theory*, Springer, 1977.

[7] P. Malliavin et H. Airault, *Intégration, analyse de Fourier, probabilités, analyse gaussienne*, Masson, 1994.

[8] J. B Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1990.

[9] T. Gallouët et R. Herbin, *Mesure, intégration, probabilités*, Ellipses, 2013.