UFR Sciences et Techniques de Besançon
Faculté de mathématiques
Unité Projet

Sous la direction de Monsieur Alexandre Nou

La revance de l'intégrale de Riemann

Adeline Laville
Clément Coine
Isabelle Guichard

Besançon, 2010 / 2011

Table des matières

1 Définitions **7**
1.1 Définitions . . . 7
1.2 Propriétés . . . 9
1.3 Exemples . . . 14

2 Théorème fondamental de l'analyse **19**
2.1 Théorème fondamental . . . 19
2.2 Ensemble de Cantor . . . 21
2.3 Escalier de Cantor . . . 23
2.3.1 Construction . . . 23
2.3.2 Propriétés . . . 27

3 Théorèmes de convergence **29**
3.1 Théorème de convergence monotone . . . 29
3.2 Caractérisation de l'absolue-intégrabilité . . . 33
3.3 Théorème de convergence dominée . . . 36

4 Liens entre les intégrales de HK et de Lebesgue **39**
4.1 Premières comparaisons . . . 39
4.2 Deuxième théorème fondamental . . . 45
4.3 Complétude de l'intégrale de Henstock-Kurzweil . . . 50

A Preuves de certains résultats **55**

B Intégrales de Riemann et de Lebesgue **61**

Bibliographie **65**

Introduction

Dans les années 1950, les mathématiciens Ralph Henstock et Jaroslav Kurzweil établissent une nouvelle théorie de l'intégration. Celle-ci est équivalente aux intégrales de Denjoy ou de Perron datant des années 1910 mais abandonnées car peu pratiques à manipuler. Cette théorie reprend celle de Riemann en y apportant une modification mineure qui s'avère pallier les limites de l'intégrale de Riemann. L'intégration au sens de Henstock-Kurzweil peut être vue comme une généralisation de l'intégrale de Riemann. Celle-ci permet d'avoir une plus grande classe de fonctions intégrables, en particulier les fonctions $\mathcal{L}$-intégrables.

Cette nouvelle définition consiste à introduire une nouvelle fonction, appelée jauge, définie sur l'intervalle considéré et adaptée à la fonction que l'on veut intégrer. Cette jauge permet, pour une subdivision pointée donnée, de contrôler la longueur de ses sous-intervalles. Ainsi pour une fonction qui croît rapidement au voisinage d'un point x, l'intervalle contenant x sera choisi petit pour que la somme de Riemann associée soit la plus précise possible.

Afin de mieux comprendre les procédés d'intégration de Riemann, Lebesgue et Henstock-Kurzweil, on peut reprendre l'exemple suivant donné par Lebesgue :
Imaginons des commerçants voulant compter leurs recettes du jour. Un premier, sans méthode, peut additionner les billets un à un dans l'ordre où ils ont été encaissés : c'est le principe de l'intégrale de Riemann.
Un deuxième rangera les billets par valeur avant de compter le nombre total de billets de chaque paquet : c'est l'idée de l'intégrale de Lebesgue.
On peut compléter l'exemple pour l'intégrale de Henstock-Kurzweil : le troisième range ses billets en plusieurs paquets approximativement de même valeur fixée dans l'ordre d'encaissement. Ainsi Henstock-Kurzweil suit l'idée

de Riemann de conserver l'ordre des sous-intervalles mais en contrôlant la valeur des quantités sommées.

Dans une première partie nous donnerons les premières définitions et propriétés que nous illustrerons par des exemples. Nous nous intéresserons ensuite à une version du théorème fondamental plus puissante que celles connues pour Riemann et Lebesgue. En effet, toute fonction dérivable sera automatiquement de dérivée intégrable avec $\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$, alors que dans le cas de Riemann et Lebesgue, on a ce résultat en supposant de plus la dérivée intégrable. C'est un résultat crucial qui a constitué une des principales motivations à l'élaboration de cette nouvelle théorie. Dans un troisième temps nous retrouverons des théorèmes de convergences dominée et monotone semblables à ceux rencontrés pour Lebesgue. Enfin, nous ferons une comparaison entre les intégrales de Lebesgue et de Henstock-Kurzweil.

On s'intéresse ici uniquement au cas d'intervalles bornés de $\mathbb{R}$, bien qu'il soit possible d'intégrer sur des intervalles non bornés.

Chapitre 1

Définitions

Nous donnons dans un premier temps les définitions qui seront utilisées tout au long de ce mémoire et en particulier celle de l'intégrabilité au sens de Henstock-Kurzweil.

1.1 Définitions

Définition 1.1.1. *Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact. Une* ***subdivision pointée*** *$\mathcal{P}$ de I est la donnée d'une subdivision $I_1 = [x_0, x_1]$, $I_2 = [x_1, x_2]$,...,* *$I_n = [x_{n-1}, x_n]$ de I (où $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant ... \leqslant x_n = b$) et d'un pointage de cette partition, ie des points $t_1 \in I_1$,...,$t_n \in I_n$.*
On la notera $\mathcal{P} = \{(I_1, t_1), ..., (I_n, t_n)\}$ et on appellera les t_i des points de marquage de $\mathcal{P}$.

Définition 1.1.2. *Soient f une fonction numérique quelconque définie sur un intervalle $I = [a, b]$, et $\mathcal{P} = \{(I_1, t_1), ..., (I_n, t_n)\}$ une subdivision pointée de $I = [a, b]$. On appelle* ***somme de Riemann*** *de f associée à $\mathcal{P}$ la quantité :*

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} l(I_k) f(t_k)$$

Définition 1.1.3. *On appelle **jauge** sur un segment I de $\mathbb{R}$ une application $\delta : I \to \mathbb{R}_+^*$.*
Etant donnée une jauge δ sur I, une subdivision pointée $\{(I_1, t_1), ..., (I_n, t_n)\}$ de I sera dite :
- δ-fine (ou fine selon la jauge δ) si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $l(I_i) < \delta(t_i)$
- δ-adaptée si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_i - \delta(t_i) < x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i < t_i + \delta(t_i)$

Remarque : - Si $\{(I_1, t_1), ..., (I_n, t_n)\}$ est δ-fine alors elle est δ-adaptée.
En effet, on a alors $l(I_i) < \delta(t_i)$, c'est-à-dire $x_i - x_{i-1} < \delta(t_i)$. On a donc $t_i - \delta(t_i) \leqslant x_i - \delta(t_i) < x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i < \delta(t_i) + x_{i-1} \leqslant \delta(t_i) + t_i$. D'où $\{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ est δ-adaptée.

- Si $\{(I_1, t_1), ..., (I_n, t_n)\}$ est δ-adaptée alors elle est 2δ-fine.
En effet, si on a $t_i - \delta(t_i) < x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i < t_i + \delta(t_i)$ alors
$x_i - x_{i-1} < \delta(t_i) + t_i - t_i + \delta(t_i) = 2\delta(t_i)$. Donc $\{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ est 2δ-fine.

Définition 1.1.4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, compact.*
*Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **$\mathcal{HK}$-intégrable sur I** s'il existe un réel J tel que, $\forall \epsilon > 0$, il existe une jauge $\delta : I \to \mathbb{R}_+^*$ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{P}$ δ-fine, on ait :*

$$|J - S(f, \mathcal{P})| < \epsilon$$

J est alors unique et on note

$$J = \int_I f(t)\mathrm{d}t$$

Remarque : Dans cette définition on peut mettre au choix $\mathcal{P}$ δ-fine ou δ-adaptée.
- En effet, f $\mathcal{HK}$-intégrable
$\Leftrightarrow \exists J \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \epsilon > 0$, il existe une jauge δ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{P}$ δ-fine, $|J - S(f, \mathcal{P})| < \epsilon$
$\Rightarrow \exists J \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \epsilon > 0$, il existe une jauge δ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{P}$ $\frac{\delta}{2}$-adaptée, $|J - S(f, \mathcal{P})| < \epsilon$.

- Réciproquement, si $\exists J \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \epsilon > 0$, il existe une jauge δ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{P}$ δ-adaptée, $|J - S(f, \mathcal{P})| < \epsilon$ alors cette inégalité est encore vraie pour toute subdivision pointée $\mathcal{P}$ δ-fine, c'est-à-dire f est $\mathcal{HK}$-intégrable.

En particulier, nous retrouvons bien le fait que l'intégrale de Henstock-Kurzweil englobe celle de Riemann. Si f est Riemann intégrable sur $[a, b]$ alors $\exists J \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall\, \mathcal{P}$ subdivision pointée de pas $< \delta_\epsilon$ (ie δ_ϵ-fine) on a $|J - S(f, \mathcal{P})| < \epsilon$.
Donc f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a, b]$ et $\forall \epsilon > 0$, la jauge δ_ϵ est une fonction constante.

1.2 Propriétés

Nous commençons par donner ici une propriété essentielle, car elle garantit, pour toute jauge δ l'existence d'une subdivision pointée δ-fine. Ainsi, la définition 1.1.3 n'est pas "vide".

Lemme 1.2.1. ***(de Cousin)*** *Pour toute jauge δ sur $[a, b]$, il existe une subdivision pointée δ-fine.*

Démonstration. Procédons par l'absurde en supposant qu'il n'existe pas de subdivision pointée δ-fine sur $[a, b]$. Alors nécessairement il n'en existe pas sur $I_1 = [a, \frac{a+b}{2}]$ ou sur $I_2 = [\frac{a+b}{2}, b]$ (en effet, s'il existait une subdivision pointée δ-fine sur I_1 et une sur I_2 alors leur réunion formerait une subdivision pointée δ-fine de $[a, b]$).

Posons $[a_1, b_1]$ un tel intervalle. En réitérant le procédé on obtient une suite de segments emboîtés $([a_n, b_n])_n$. Il existe un point $c \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} [a_i, b_i]$.

Or $\delta(c) > 0$ donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$c - \delta(c) < a_N \leqslant c \leqslant b_N < c + \delta(c)$$

Alors $(c, [a_N, b_N])$ est une subdivision pointée δ-fine de $[a_N, b_N]$. On a une contradiction. D'où le résultat. $\square$

On retrouve les propriétés élémentaires connues pour les intégrales de Riemann et de Lebesgue :

Proposition 1.2.1. *Soient $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{HK}$-intégrables sur $[a,b]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

(i) $f+\lambda g$ est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b (f+\lambda g)(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

(ii) Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$

Démonstration. (i) Soit $\epsilon > 0$ et δ_1, δ_2 deux jauges sur $[a,b]$ pour lesquelles si $\mathcal{P}$ est δ_1-fine, $\left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}) - \int_a^b f\right| < \epsilon$, et si $\mathcal{Q}$ est δ_2-fine, $\left|\mathcal{S}(g,\mathcal{Q}) - \int_a^b g\right| < \epsilon$. Soit $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$. Alors toute subdivision pointée δ-fine est δ_1-fine et δ_2-fine. Soit $\mathcal{P}$ une subdivision pointée δ-fine, on a :

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{S}(f+\lambda g,\mathcal{P}) - \left(\int_a^b f + \lambda\int_a^b g\right)\right| &= \left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}) + \lambda\mathcal{S}(g,\mathcal{P}) - \left(\int_a^b f + \lambda\int_a^b g\right)\right| \\ &\leqslant \left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}) - \int_a^b f\right| + |\lambda|\left|\mathcal{S}(g,\mathcal{P}) - \int_a^b g\right| \\ &\leqslant \epsilon + |\lambda|\epsilon = (1+|\lambda|)\epsilon\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(ii) Posons $h = g - f$. Montrons que si $h \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $A = \displaystyle\int_a^b h(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$ et on conclut par linéarité.

Supposons par l'absurde $A < 0$. Pour $\epsilon = -\dfrac{A}{2} > 0$, il existe une jauge δ sur $[a,b]$ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{P}$ δ-fine on ait :

$$|\mathcal{S}(h,\mathcal{P}) - A| < -\frac{A}{2}$$

Or, puisque $h \geqslant 0$, on a $\mathcal{S}(h,\mathcal{P}) \geqslant 0$ et donc $\mathcal{S}(h,\mathcal{P}) - A \geqslant 0$. D'où l'inégalité $\mathcal{S}(h,\mathcal{P}) < -\dfrac{A}{2} + A = \dfrac{A}{2} < 0$, ce qui est une contradiction.
Donc $A \geqslant 0$. □

Théorème 1.2.1. ***(Critère de Cauchy)*** *Une fonction f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ telle que si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux subdivisions pointées δ_ϵ-fines de $[a,b]$, $|S(f,\mathcal{P}_1) - S(f,\mathcal{P}_2)| < \epsilon$.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons f $\mathcal{HK}$-intégrable et soit $\epsilon > 0$. Alors il existe une jauge δ_ϵ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{P}$ δ_ϵ-fine on ait :

$$\left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

En particulier, si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux subdivisions pointées δ_ϵ-fines alors on a :

$$|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_1) - \mathcal{S}(f,\mathcal{P}_2)| \leqslant \left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_1) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_2) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| < \epsilon$$

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $\forall \epsilon > 0$, il existe une jauge δ_ϵ telle que pour $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux subdivisions pointées δ_ϵ-fines on ait :

$$|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_1) - \mathcal{S}(f,\mathcal{P}_2)| < \epsilon$$

Appliquons ce qui précède en donnant à ϵ les valeurs $\frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe une jauge δ_n telle que pour $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ subdivisions pointées δ_n-fines on ait : $|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_1) - \mathcal{S}(f,\mathcal{P}_2)| < \frac{1}{n}$
On peut supposer $\delta_{n+1} \leqslant \delta_n$. On considère la suite $(\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_i))_{i\in\mathbb{N}^*}$ des sommes de Riemann où $\mathcal{P}_i$ est une subdivision pointée δ_i-fine. Montrons que cette suite est de Cauchy.
Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n > m$. On remarque qu'une subdivision pointée δ_n-fine est δ_m-fine. En particulier $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_m$ sont δ_m-fines. On a donc :

$$|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_n) - \mathcal{S}(f,\mathcal{P}_m)| < \frac{1}{m} \quad (*)$$

La suite est de Cauchy donc convergente vers $I = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(f,\mathcal{P}_n)$.

En faisant tendre n vers l'infini dans $(*)$ on a : $|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_m)-I| \leqslant \dfrac{1}{m}$
Soit $\epsilon>0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N}<\frac{\epsilon}{2}$. La jauge δ_N est telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{P}$ δ_N-fine on ait :

$$|\mathcal{S}(f,\mathcal{P})-I| \leqslant |\mathcal{S}(f,\mathcal{P})-\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_N)|+|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_N)-I| \leqslant \frac{1}{N}+\frac{1}{N}<\epsilon$$

D'où f $\mathcal{HK}$-intégrable avec $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I$.

$\square$

Proposition 1.2.2. *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,b]$. Alors pour tout $c,\ d\in[a,b]$, $c\leqslant d$, f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[c,d]$.*

Démonstration. Soit $d\in[a,b]$, montrons que f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,d]$. Soit $\epsilon>0$ et soit δ_ϵ une jauge sur $[a,b]$. Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ deux subdivisions pointées δ_ϵ-fines de $[a,d]$ et $\mathcal{Q}$ une subdivision pointée δ_ϵ-fine de $[d,b]$. Alors $\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}'\cup\mathcal{Q}$ forment deux subdivisions pointées δ_ϵ-fines de $[a,b]$ et on a :

$$\begin{aligned}|S(f,\mathcal{P})-S(f,\mathcal{P}')| &= |S(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q})-S(f,\mathcal{P}'\cup\mathcal{Q})|\\ &\leqslant \left|S(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q})-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|+\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-S(f,\mathcal{P}'\cup\mathcal{Q})\right|\\ &\leqslant 2\epsilon\end{aligned}$$

Par le critère de Cauchy 1.2.1, f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,d]$.

On montre de même l'intégrabilité de f sur $[c,b]$ pour $a\leqslant c\leqslant d$. En appliquant la première partie de la preuve à $[c,b]$ et au point d, on obtient que f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[c,d]$. $\square$

Proposition 1.2.3. ***(Relation de Chasles)*** *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $c\in[a,b]$. f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et alors on a :*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\mathrm{d}t \quad (1)$$

Démonstration. Par la proposition 1.2.2, f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ pour tout $c \in [a,b]$ et il reste à montrer (1). On note $I = \displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.
Soient $\epsilon > 0$ et δ_1, δ_2 deux jauges respectivement sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ telles que pour toute subdivision pointée $\mathcal{P}$ δ_1-fine, $|S(f,\mathcal{P}) - I| < \epsilon$, et pour toute subdivision pointée $\mathcal{Q}$ δ_2-fine, $|S(f,\mathcal{Q}) - J| < \epsilon$. On définit une jauge δ sur $[a,b]$ par :

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\{\delta_1(x),\ c-x\} & \text{si } x \in [a,c[\\ \min\{\delta_1(c),\ \delta_2(c)\} & \text{si } x = c \\ \min\{x-c,\ \delta_2(x)\} & \text{si } x \in]c,b] \end{cases}$$

de sorte que $\delta \leqslant \delta_1$ sur $[a,c]$ et $\delta \leqslant \delta_2$ sur $[c,b]$.

Soit $\mathcal{P} = ([x_{i-1},x_i], t_i)_{i=1}^n$ une subdivision pointée δ_ϵ-fine de $[a,b]$.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $c \in [x_{k-1},x_k]$. Montrons que nécessairement $t_k = c$.
Si $t_k < c$ alors $x_k < t_k + \delta(t_k) \leqslant t_k + c - t_k = c$ ce qui est absurde.
Si $t_k > c$ alors $x_{k-1} > t_k - \delta(t_k) \geqslant t_k - (t_k - c) = c$ ce qui est également absurde.
Donc $t_k = c$ et $\delta(t_k) = \min\{\delta_1(c), \delta_2(c)\}$.

Posons $A_1 = ([x_{k-1},c], c)$ et $A_2 = ([c,x_k], c)$. Puisque $c - \delta(c) < x_{k-1}$ et $x_k - \delta(c) < c$ (car $\mathcal{P}$ δ_ϵ-fine), on a que $\mathcal{P}_1 = ([x_{i-1},x_i], t_i)_{i=1}^{k-1} \bigcup A_1$ et
$\mathcal{P}_2 = ([x_{i-1},x_i], t_i)_{i=k+1}^{n} \bigcup A_2$ sont respectivement des subdivisions pointées δ_1-fine et δ_2-fine.
On a alors :

$$\begin{aligned} |S(f,\mathcal{P}) - (I+J)| &= |S(f,\mathcal{P}_1) + S(f,\mathcal{P}_2) - (I+J)| \\ &\leqslant |S(f,\mathcal{P}_1) - I| + |S(f,\mathcal{P}_2) - J| \\ &\leqslant 2\epsilon \end{aligned}$$

D'où l'égalité $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$. □

1.3 Exemples

L'étude de l'intégrale de Henstock-Kurzweil est justifiée au sens où il existe des fonctions $\mathcal{HK}$-intégrables mais non Riemann-intégrables. Nous donnons ici deux exemples de telles fonctions.

Exemple 1 : (Fonction $\mathcal{HK}$-intégrable mais pas $\mathcal{R}$-intégrable)
Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- La fonction f n'est pas $\mathcal{R}$-intégrable car f n'est pas bornée sur $[0,1]$.
- Montrons que f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[0,1]$ et $\mathcal{HK}\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$.

L'aire sous la courbe entre x_{k-1} et x_k est donnée par $2\sqrt{x_k} - 2\sqrt{x_{k-1}}$. On voudrait $f(c_k)(x_k - x_{k-1}) \simeq 2\sqrt{x_k} - 2\sqrt{x_{k-1}}$ pour $c_k > 0$.
Déterminons la fonction de jauge adéquate :
Si $c_1 = 0$, alors $0(x_1 - 0) \simeq 2\sqrt{x_1}$ et $2\sqrt{x_1} < 2\sqrt{\delta(0)} \leqslant \dfrac{\epsilon}{2}$. Donc $\delta(0) = \dfrac{\epsilon^2}{16}$.

Pour $k \in [\![2, n]\!]$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\sqrt{c_k}}(x_k - x_{k-1}) - 2(\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k-1}})\right| \\
&\quad = \left|\frac{1}{\sqrt{c_k}}(x_k - c_k + c_k - x_{k-1}) - 2(\sqrt{x_k} - \sqrt{c_k} + \sqrt{c_k} - \sqrt{x_{k-1}})\right| \\
&\quad \leqslant \left|\frac{1}{\sqrt{c_k}}(x_k - c_k) - 2(\sqrt{x_k} - 2\sqrt{c_k})\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{c_k}}(c_k - x_{k-1}) - 2(\sqrt{c_k} - \sqrt{x_{k-1}})\right| \\
&\quad = (x_k - c_k)\left|\frac{\sqrt{x_k} - \sqrt{c_k}}{\sqrt{c_k}(\sqrt{x_k} + \sqrt{c_k})}\right| + (c_k - x_{k-1})\left|\frac{\sqrt{c_k} - \sqrt{x_{k-1}}}{\sqrt{c_k}(\sqrt{c_k} + \sqrt{x_{k-1}})}\right| \\
&\quad \leqslant (x_k - c_k)\frac{\sqrt{x_k} - \sqrt{c_k}}{c_k} + (c_k - x_{k-1})\frac{\sqrt{c_k} - \sqrt{x_{k-1}}}{c_k} \\
&\quad \leqslant (x_k - c_k)\frac{x_k - c_k}{c_k^{3/2}} + (c_k - x_{k-1})\frac{c_k - x_{k-1}}{c_k^{3/2}} \\
&\quad \leqslant \frac{2(x_k - x_{k-1})^2}{c_k^{3/2}} \\
&\quad < \frac{2\delta(c_k)}{c_k^{3/2}}(x_k - x_{k-1})
\end{aligned}$$

Sur $[x_1, 1]$, l'erreur est donc majorée par $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{2\delta(c_k)}{c_k^{3/2}}(x_k - x_{k-1})$ dont on voudrait qu'elle soit $\leqslant \dfrac{\epsilon}{2}$.
C'est le cas si $\dfrac{2\delta(c_k)}{c_k^{3/2}} \leqslant \dfrac{\epsilon}{2}$, ie $\delta(c_k) < \dfrac{\epsilon}{4} c_k^{3/2}$ pour $k \in [\![2, n]\!]$.

Soit $\delta(x) = \begin{cases} \frac{\epsilon^2}{16} & \text{si } x = 0 \\ \frac{\epsilon}{4} c_k^{3/2} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$ Soit $\epsilon > 0$ (supposons $\epsilon < 4$). Soit $\mathcal{P} = ([x_{k-1}, x_k], c_k)_{k=1}^{n}$ une subdivision pointée δ_ϵ-fine de $[0, 1]$ (existe d'après le lemme de Cousin 1.2.1).
Nécessairement $c_1 = 0$. En effet, si $c_1 > 0$, alors $\delta_\epsilon(c_1) = \dfrac{\epsilon}{4} c_1^{3/2}$ et comme $c_1 \leqslant x_1 - \underbrace{x_0}_{0} < \delta_\epsilon(c_1)$ alors on doit avoir $c_1 - \dfrac{\epsilon}{4} c_1^{3/2} < 0$.

Mais $c_1 - \dfrac{\epsilon}{4} c_1^{3/2} = \dfrac{c_1(4 - \epsilon c_1^{3/2})}{4} \geqslant \dfrac{c_1(4-\epsilon)}{4} > 0$. Donc $c_1 = 0$.
On a ainsi :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) - 2\right| &= \left|\sum_{k=2}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) - 2\right| \\
&= \left|\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{c_k}}(x_k - x_{k-1}) - 2\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k-1}}\right| \\
&= \left|\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{c_k}}(x_k - x_{k-1}) - 2\left(\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k-1}}\,\right)\right) - 2(\sqrt{x_1} - \sqrt{0})\right| \\
&\leqslant 2\sqrt{x_1} + \sum_{k=2}^{n} \left|\frac{1}{\sqrt{c_k}}(x_k - x_{k-1}) - 2\left(\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k-1}}\,\right)\right| \\
&\leqslant 2\sqrt{\delta(0)} + \sum_{k=2}^{n} 2\frac{\delta(c_k)}{c_k^{3/2}}(x_k - x_{k-1}) \\
&\leqslant 2\frac{\epsilon}{4} + \sum_{k=2}^{n} 2\frac{\epsilon}{4}\frac{c_k^{3/2}}{c_k^{3/2}}(x_k - x_{k-1}) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

Donc f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[0,1]$ et $\mathcal{HK}\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$.

Exemple 2 : (Fonction $\mathcal{HK}$-intégrable mais pas $\mathcal{R}$-intégrable)

Soit $\underbrace{\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)}_{f(x)} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- Montrons que f n'est pas $\mathcal{R}$-intégrable sur $[0,1]$.
Le critère de Cauchy pour les sommes de Riemann nous dit :
$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, tel que pour toutes subdivisions pointées $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ de pas $\max\limits_{i \in [\![1,n]\!]}(x_i - x_{i-1}) < \delta$, $|S(f,\mathcal{P}) - S(f,\mathcal{Q})| < \epsilon$.

Soient $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ et $\delta > 0$, montrons qu'il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux subdivisions pointées de pas $< \delta$ telles que $|S(f,\mathcal{P}) - S(f,\mathcal{Q})| \geqslant \dfrac{1}{2}$.

On choisit les x_i tel que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i - x_{i-1} < \delta$.

Pour $\mathcal{P}$, on choisit les t_i dans chaque $[x_{i-1}, x_i]$ avec t_i rationnel. Ainsi, la somme de Riemann associée est : $S(f,\mathcal{P}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = 1$.

Pour $\mathcal{Q}$, on choisit les s_i dans chaque $[x_{i-1}, x_i]$ avec s_i irrationnel, de sorte que la somme de Riemann associée soit : $S(f,\mathcal{Q}) = 0$.

D'où, $|S(f,\mathcal{P}) - S(f,\mathcal{Q})| = 1 > \dfrac{1}{2}$.

- Montrons que f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[0,1]$.
On écrit $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_k, k \in \mathbb{N}\}$ car $\mathbb{Q}$ est dénombrable. On définit la fonction de jauge :

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \dfrac{\epsilon}{2^k} & \text{si } x = q_k \end{cases}$$

Soit $\mathcal{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i), i = 1 \text{ à } n\}$ une subdivision pointée δ-fine :
$\forall i \in [\![1,n]\!],\ t_i - \delta(t_i) < x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i < t_i + \delta(t_i)$,

d'où $t_i \in [x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

La somme de Riemann associée à $\mathcal{P}$ est :

$$0 \leqslant S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Dans cette somme ne restent que les termes pour lesquels $t_i \in \mathbb{Q}$.

Soit $A = \{i \in [\![1, n]\!],\ t_i \in \mathbb{Q}\} \subseteq [\![1, n]\!]$. Alors $\forall i \in A,\ \exists!\ k_i$ tel que $t_i = q_{k_i}$ et on a :

$$0 \leqslant S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i\in A}(x_i - x_{i-1}) \leqslant \epsilon \sum_{i\in A} \frac{1}{2^{k_i-1}} \leqslant \epsilon \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 4\epsilon$$

Or, $\forall i \in A, [x_{i-1}, x_i] \subseteq [q_{k_i} - \delta(q_{k_i}), q_{k_i} + \delta(q_{k_i})]$ donc :

$$x_i - x_{i-1} \leqslant 2\delta(q_{k_i}) = \frac{\epsilon}{2^{q_{k_i}-1}}$$

On a bien f $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[0, 1]$ et $\mathcal{HK} \displaystyle\int_0^1 \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)\mathrm{d}x = 0$.

Ces exemples montrent qu'il est possible d'intégrer des fonctions non bornées ainsi que des fonctions très irrégulières telle que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$.

Remarque : - On peut généraliser l'exemple précédent : les fonctions nulles sauf sur un ensemble dénombrable D de points sont $\mathcal{HK}$-intégrables d'intégrale nulle. Pour voir cela il suffit de considérer, pour f une telle fonction et $\epsilon > 0$, la jauge définie par :

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b] \setminus D \\ \dfrac{\epsilon}{f(x).2^k} & \text{si } x = q_k \end{cases}$$

où $D = \{q_k,\ k \in \mathbb{N}\}$.
Le raisonnement est ensuite similaire au précédent.

- En particulier, si $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ et f et g diffèrent en un nombre dénombrable de points, alors f est $\mathcal{HK}$-intégrable si et seulement si g l'est,
et on a alors $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Chapitre 2

Théorème fondamental de l'analyse

2.1 Théorème fondamental

Nous retrouvons une version du théorème fondamental de l'analyse pour l'intégrale de Henstock-Kurzweil. Celle-ci est moins restrictive dans ses hypothèses que celles des intégrales de Riemann et de Lebesgue (voir B.0.4 dans l'annexe B et 4.1.2 dans le chapitre 4). En effet, la seule dérivabilité de F suffit, là où l'intégrabilité de F' est supposée pour Riemann et Lebesgue.

Pour démontrer le théorème fondamental nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *Soit $F : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable au point $t \in I$. Etant donné $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon(t) > 0$ telle que si $u, v \in I$ satisfont*

$$t - \delta_\epsilon(t) < u \leqslant t \leqslant v < t + \delta_\epsilon(t)$$

alors on a :

$$\left| F(v) - F(u) - F^{'}(t)(v-u) \right| \leqslant \epsilon(v-u)$$

Démonstration. Par définition de la dérivée $F^{'}$ au point t, pour $\epsilon > 0$ donné, il existe $\delta_\epsilon(t) > 0$ telle que si $0 < |z-t| < \delta_\epsilon(t)$, $z \in I$, alors

$$\left|\frac{F(z)-F(t)}{z-t} - F'(t)\right| \leqslant \epsilon$$

Ce qui donne

$$\left|F(z) - F(t) - F^{'}(t)(z-t)\right| \leqslant \epsilon\,|(z-t)|$$

En particulier, si on prend $u \in$ I et $v \in I$, $u \leqslant t \leqslant v$, tels que $|t-u| < \delta_\epsilon(t)$ et $|v-t| < \delta_\epsilon(t)$, on peut appliquer l'inégalité précédente et on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|F(v) - F(u) - F^{'}(t)(v-u)\right| \\
&\quad = \left|(F(v) - F(t) - F^{'}(t)(v-t)) - (F(u) - F(t) - F^{'}(t)(u-t))\right| \\
&\quad \leqslant \left|F(v) - F(t) - F^{'}(t)(v-t)\right| + \left|F(u) - F(t) - F^{'}(t)(u-t)\right| \\
&\quad \leqslant \epsilon(v-t) + \epsilon(t-u) \\
&\quad = \epsilon(v-u)
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Théorème 2.1.1. ***(Théorème fondamental de l'analyse)*** *Soit F une fonction dérivable sur un intervalle $[a,b]$. Alors la dérivée F' de F est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,b]$ et*

$$\forall x \in [a,b]\,, \quad \mathcal{HK}\int_a^x F^{'}(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ donné. D'après le lemme 2.1.1, pour chaque point x dans l'intervalle $[a,b]$ il existe $\delta_\epsilon(x) > 0$ telle que :
Pour $u < v$, $x - \delta_\epsilon(x) < u \leqslant x \leqslant v < x + \delta_\epsilon(x)$ on ait :

$$\left|F(v) - F(u) - F^{'}(x)(v-u)\right| \leqslant \epsilon(v-u)$$

Cela nous donne une jauge $\delta_\epsilon(.)$. Soit $x \in]a,b]$.
Soit $\mathcal{P} = \{([a,x_1],c_1),([x_1,x_2],c_2),...,([x_{n-1},x],c_n)\}$ une subdivision pointée δ_ϵ-fine de $[a,x]$ (elle existe d'après le lemme de Cousin 1.2.1). On a alors

$$c_k - \delta_\epsilon(c_k) < x_{k-1} \leqslant c_k \leqslant x_k < c_k + \delta_\epsilon(c_k) \quad \forall k \in [\![1,n]\!]$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} F^{'}(c_k)(x_k - x_{k-1}) - [F(x) - F(a)]\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}(F^{'}(c_k)(x_k - x_{k-1}) - [F(x_k) - F(x_{k-1})])\right| \\ &\leqslant \epsilon \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \quad \text{par le lemme 2.1.1} \\ &= \epsilon(b-a)\end{aligned}$$

D'où $F^{'}$ est $\mathcal{HK}$-intégrable et $\mathcal{HK}\displaystyle\int_a^x F^{'}(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$, $x \in [a,b]$. $\square$

Les hypothèses du théorème fondamental ne peuvent être affaiblies en supposant la dérivabilité presque partout de F. Nous nous intéressons à l'ensemble de Cantor sur lequel est définie la fonction dite "escalier de Cantor" qui constitue un contre-exemple.

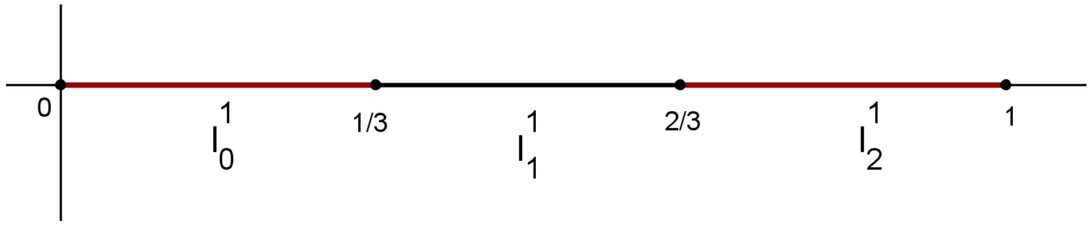
2.2 Ensemble de Cantor

La construction de l'ensemble triadique de Cantor, qu'on notera K, se fait ainsi :

On considère l'intervalle $[0,1]$ qu'on découpe en trois intervalles de même longueur $\dfrac{1}{3}$:

$$I_0^1 = \left[0, \frac{1}{3}\right], I_1^1 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], I_2^1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Puis on retire l'intervalle central I_1^1. On obtient $K^1 = I_0^1 \cup I_1^1$.



On réitère l'opération sur les intervalles I_0^1 et I_2^1. On écrit :

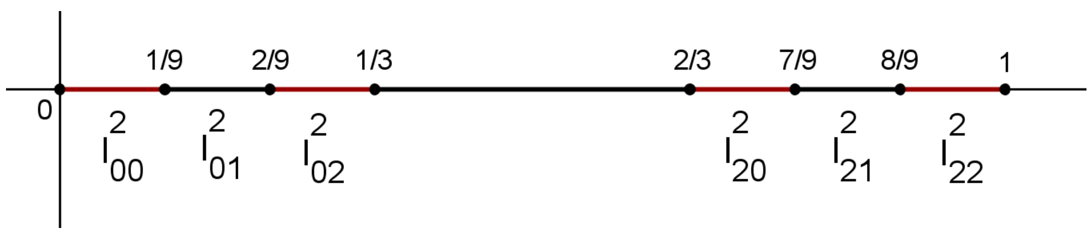
$$I_0^1 = I_{00}^2 \cup I_{01}^2 \cup I_{02}^2 = \left[0, \frac{1}{3^2}\right] \bigcup \left[\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right]$$

et

$$I_2^1 = I_{20}^2 \cup I_{21}^2 \cup I_{22}^2 = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right] \bigcup \left[\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right] \bigcup \left[\frac{8}{3^2}, 1\right]$$

On retire les deux intervalles centraux et on obtient :

$$K^2 = I_{00}^2 \cup I_{02}^2 \cup I_{20}^2 \cup I_{22}^2$$



K^2 est l'union de 2^2 intervalles de même longueur $\frac{1}{3^2}$. En réitérant l'opération n fois on obtient K^n comme réunion de 2^n intervalles fermés disjoints de même longueur $\frac{1}{3^n}$ avec $K^n \subset K^{n-1}$.

L'ensemble de Cantor est défini par : $K = \bigcap_{n \geqslant 1} K^n$.

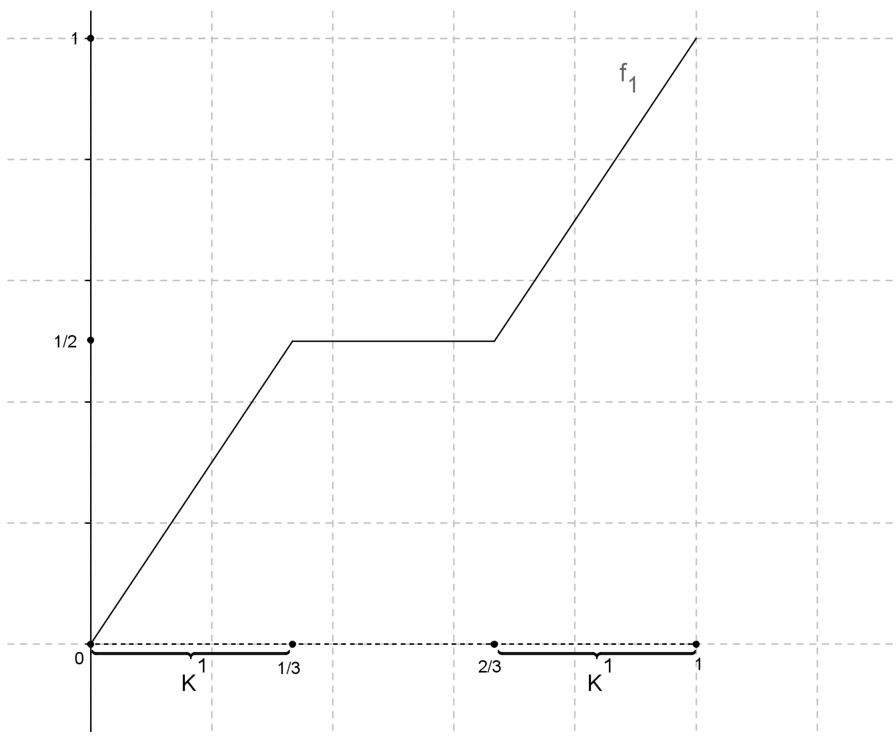
Théorème 2.2.1. *L'ensemble de Cantor K est un compact de mesure nulle, non dénombrable.*

Démonstration. Voir la preuve A dans l'annexe A. □

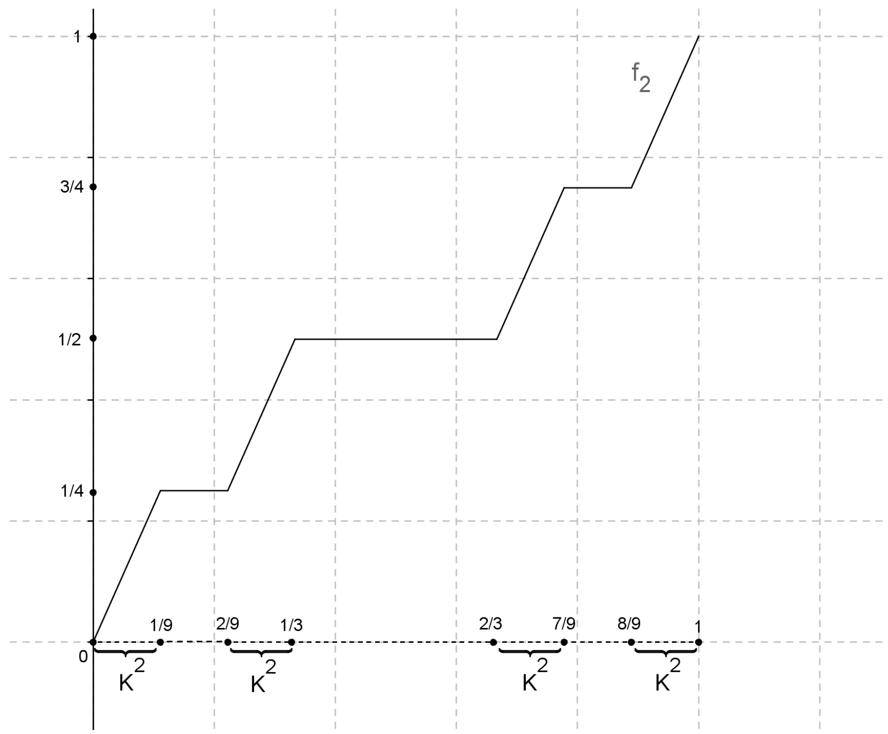
2.3 Escalier de Cantor

2.3.1 Construction

Nous venons d'étudier l'ensemble de Cantor sur lequel nous allons maintenant construire l'escalier de Cantor.
Nous construisons la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ d'applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ comme suit :
Sur $[0,1]$, on construit f_1 affine sur chaque intervalle constituant K^1 de coefficient directeur $\dfrac{3}{2}$ et constante sur $[0,1]\setminus K^1$ de sorte que $f_1(0)=0$, $f_1(1)=1$ et f_1 continue sur $[0,1]$.



De la même façon on construit f_2 affine sur chaque intervalle constituant K^2 de coefficient directeur $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ et constante sur chaque intervalle constituant $[0,1]\setminus K^2$ de sorte que f_2 soit continue sur $[0,1]$ avec $f_2(0)=0$ et $f_2(1)=1$.



Et ainsi de suite on construit f_n affine sur chaque intervalle constituant K^n de coefficient directeur $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ et constante sur chaque intervalle constituant $[0,1]\backslash K^n$ de sorte que f_n soit continue sur $[0,1]$ et que $f_n(0)=0$ et $f_n(1)=1$.

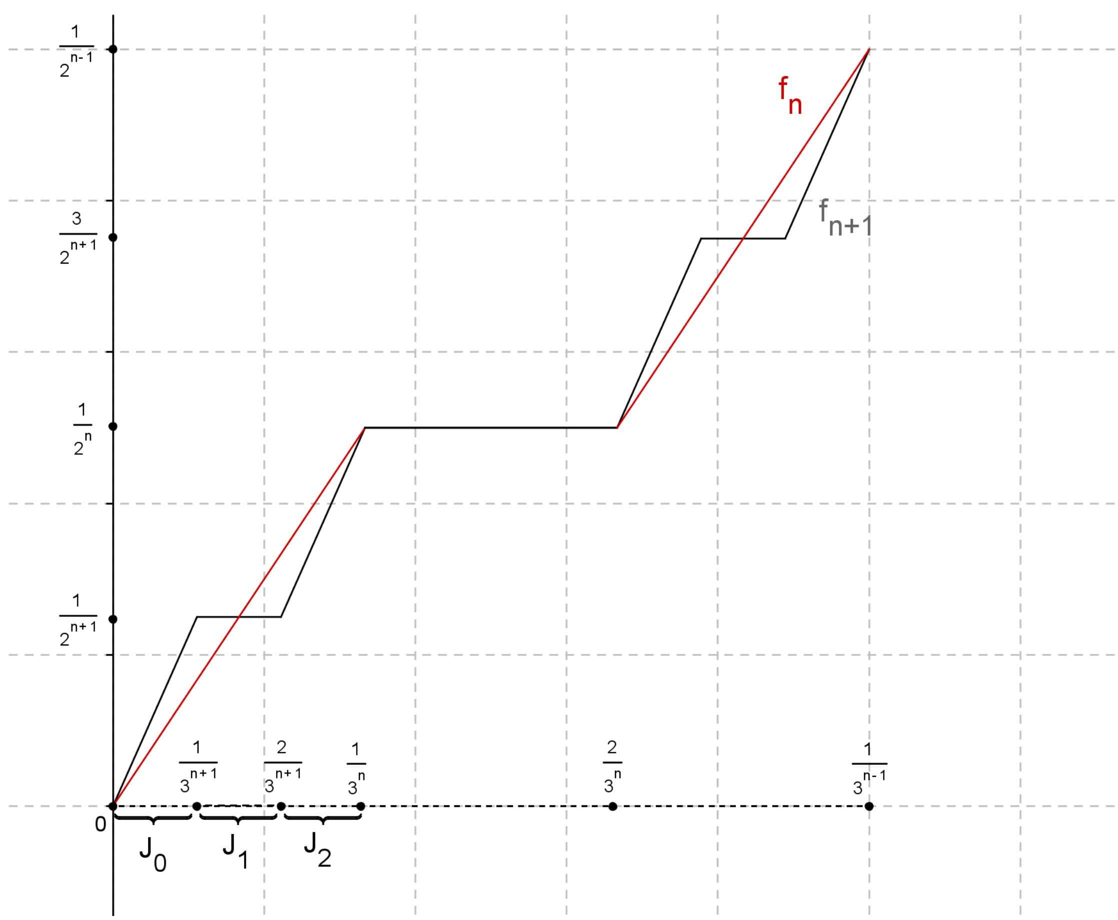
Proposition 2.3.1. *La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie :*

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, f_n$ *est continue sur* $[0,1]$, $f_n(0)=0$ *et* $f_n(1)=1$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ *est croissante sur* $[0,1]$
3. $(f_n)_n$ *est uniformément convergente sur* $[0,1]$ *vers une fonction* f*, appelée escalier de Cantor.*

Démonstration. 1. La fonction f_n est continue avec $f_n(0)=0$ et $f_n(1)=1$ par construction.

2. La fonction f_n est croissante par construction.

3. Montrons que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est uniformément convergente.
- Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{3.2^{n+1}}$. Il suffit de le vérifier sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{3^{n-1}}\right]$, le graphe des fonctions n'étant que des translatés de ce premier morceau. Séparons l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{3^n}\right]$ en trois intervalles $J_0 = \left[0, \dfrac{1}{3^{n+1}}\right]$,
$J_1 = \left[\dfrac{1}{3^{n+1}}, \dfrac{2}{3^{n+1}}\right]$ et $J_2 = \left[\dfrac{2}{3^{n+1}}, \dfrac{1}{3^n}\right]$.



$$\begin{aligned}\forall x \in J_0,\ |f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \left|\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} x - \left(\frac{3}{2}\right)^{n} x\right| &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n}\left(\frac{3}{2} - 1\right) x \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n} \frac{x}{2} \\ &\leqslant \frac{3^n}{2^n}\frac{1}{2.3^{n+1}} \\ &= \frac{1}{3.2^{n+1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x \in J_1,\ |f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \left|\frac{1}{2^{n+1}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{n} x\right| &= \left|\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{3^n}{2^n} x\right| \\ &= \frac{1}{2^n}\left|\frac{1}{2} - 3^n x\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2^n}\frac{1}{2.3} \quad \text{par } (*) \\ &= \frac{1}{3.2^{n+1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(*)\ \frac{1}{3^{n+1}} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leqslant 3^n x \leqslant \frac{2}{3} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{2} - 3^n x \geqslant \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{6} \geqslant \frac{1}{2} - 3^n x \geqslant -\frac{1}{6} \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2} - 3^n x\right| \leqslant \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$\forall x \in J_2$, on montre de même que pour J_0 que $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{3.2^{n+1}}$.
Sur $\left[\dfrac{1}{3^n}, \dfrac{2}{3^n}\right] \subset (K^n)^\complement$, les fonctions f_n et f_{n+1} sont constantes respectivement égales à $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{2^n}$ et à $2\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1} \dfrac{1}{3^{n+1}} = \dfrac{2}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2^n}$.
Donc leur différence est nulle.
Sur l'intervalle $\left[\dfrac{2}{3^n}, \dfrac{1}{3^{n-1}}\right]$ le graphe des deux fonctions est le translaté

de celui sur $\left[0, \frac{1}{3^n}\right]$.

- Montrons que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy : $\forall n,\ p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} \underbrace{|f_{n+k+1}(x) - f_{n+k}(x)|}_{\leqslant \frac{1}{3.2^{n+k+1}}} &\leqslant \frac{1}{3.2^n} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^{k+1}} \\
&\leqslant \frac{1}{3.2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \\
&= \frac{1}{3.2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

D'où $\|f_{n+p} - f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La suite $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $\left(C\left([0,1]\right), \|.\|_\infty\right)$ qui est complet et donc elle converge vers une application f continue.

□

Ainsi la fonction f, limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$, est continue, croissante et vérifie $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

2.3.2 Propriétés

Propriétés 2.3.1. *1. f est dérivable presque partout et $f' = 0$ λ-p.p.*

2. f' est $\mathcal{L}$-intégrable et $\mathcal{L}\displaystyle\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = 0$.

Démonstration. 1. La suite K^n, décrite dans l'ensemble de Cantor, est décroissante, donc la suite $[0,1] \setminus K^n$ est croissante et, $\forall x \in [0,1] \setminus K$, $f_n(x)$ est constante à partir d'un certain rang n_x.

Soit $x \notin K$, avec K l'ensemble de Cantor de mesure nulle. Comme f_n est égale à une constante indépendante de $n \geqslant n_x$ au voisinage de x, f est également constante au voisinage de x. En particulier f est dérivable en x et $f'(x) = 0$.

2. Par B.0.2 en annexe, puisque f' est nulle presque partout elle est mesurable et d'intégrale nulle.

$\square$

Remarque : Or, par le théorème 4.1.1 énoncé et démontré dans le chapitre 4, on sait qu'une fonction $\mathcal{L}$-intégrable est $\mathcal{HK}$-intégrable et les intégrales coïncident donc le résultat est encore vrai pour l'intégrale de Henstock-Kurzweil. L'exemple de la fonction f dite de Cantor montre bien que les hypothèses du théorème fondamental 2.1.1 pour l'intégrale $\mathcal{HK}$ ne peuvent être affaiblies en supposant la dérivabilité presque partout de f. En effet, nous aurions alors $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1$. Or $f'(x) = 0$ presque partout donc $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 0 \ \mathrm{d}x = 0 \neq 1$.

Chapitre 3

Théorèmes de convergence

On montre dans ce chapitre qu'on retrouve des théorèmes de convergence monotone et dominée pour l'intégrale de Henstock-Kurzweil proches de ceux établis pour l'intégrale de Lebesgue (voir B.0.5 et B.0.6 en annexe B).

3.1 Théorème de convergence monotone

La preuve du théorème de convergence monotone nécessite le lemme suivant :

Lemme 3.1.1. ***(de Henstock)*** *Soit f une fonction $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a, b]$ et, pour $\epsilon > 0$, soit δ_ϵ une jauge sur $[a, b]$ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{P}$ δ_ϵ-fine de $[a, b]$,*

$$\left| \mathcal{S}(f, \mathcal{P}) - \mathcal{HK} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right| < \epsilon$$

Soit $(F_j)_{j=1}^n$ une famille finie d'intervalles fermés de $[a, b]$ d'intérieurs disjoints 2 à 2 avec $y_j \in F_j \subset [y_j - \delta_\epsilon(y_j), y_j + \delta_\epsilon(y_j)]$. Alors :

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \left\{ f(y_j) l(F_j) - \mathcal{HK} \int_{F_j} f(x) dx \right\} \right| \leqslant \epsilon$$

et

$$\sum_{j=1}^{n} \left| f(y_j)l(F_j) - \mathcal{HK}\int_{F_j} f(x)dx \right| \leqslant 2\epsilon$$

Démonstration. Voir la preuve A en annexe B. □

Théorème 3.1.1. ***(Convergence monotone)*** *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite monotone de fonctions $\mathcal{HK}$-intégrables telles que pour tout $x \in [a,b]$, $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers $f(x)$.*
Alors f est $\mathcal{HK}$-intégrable si et seulement si la suite $(I_n)_{n\geqslant 1} = \left(\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée. Dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{HK}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \mathcal{HK}\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \mathcal{HK}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration. On montre le résultat pour une suite croissante de fonctions et on peut alors remplacer dans l'énoncé bornée par majorée car la suite des intégrales sera alors croissante donc minorée.

($\Rightarrow$) Soit $(f_k)_{k\geqslant 1}$ une suite croissante de fonctions c'est à dire $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots \leqslant f_k \leqslant f_{k+1} \leqslant f$ sur $[a,b]$, alors, par croissance de l'intégrale, la suite $(I_k)_{k\geqslant 1}$ des intégrales est croissante également. Si f est $\mathcal{HK}$-intégrable on a alors :

$$\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \forall k \geqslant 1$$

La suite $(I_k)_{k\geqslant 1}$ est par conséquent majorée. Cette suite étant croissante et majorée, elle est convergente.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée, convergente vers $A = \lim\limits_{k\to+\infty} \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x$. On va montrer que $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$. Alors f sera $\mathcal{HK}$-intégrable d'intégrale égale à A.

Soit $\epsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant K \Rightarrow 0 \leqslant A - \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x < \epsilon$ $(*)$.
Comme f_k est $\mathcal{HK}$-intégrable pour tout $k \geqslant 1$, il existe une jauge δ_k telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{P}$ δ_k-fine,

$$\left|S(f_k, \mathcal{P}) - \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\epsilon}{2^{k+1}} \ (**)$$

Soit $x \in [a, b]$. Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x)$, $\exists n(x) \geqslant K$ tel que $k \geqslant n(x) \Rightarrow |f(x) - f_k(x)| < \epsilon$ $(***)$

On a $\delta = \delta_{n(x)}$ une jauge sur $[a, b]$. Soit $\mathcal{Q} = ([x_{i-1}, x_i], t_i)_{i=1}^m$ une subdivision pointée δ-fine de $[a, b]$. On a :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}(f, \mathcal{Q}) - A| &= \left|\sum_{i=1}^m f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{i=1}^m f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^m f_{n(t_i)}(t_i)(x_i - x_{i-1})\right| \\
&+ \left|\sum_{i=1}^m f_{n(t_i)}(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{n(t_i)}(x)\mathrm{d}x\right| \\
&+ \left|\sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{n(t_i)}(x)\mathrm{d}x \ - A\right| \\
&:= S_1 + S_2 + S_3
\end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}
S_1 \leqslant \sum_{i=1}^m \left|f(t_i) - f_{n(t_i)}(t_i)\right|(x_i - x_{i-1}) &< \epsilon \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1}) \quad (\text{d'après } (***)) \\
&= \epsilon(b - a)
\end{aligned}$$

- On a $\displaystyle\int_a^b f_K(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_K(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{n(t_i)}(x)\mathrm{d}x$
(car $n(t_i) \geqslant K$ donc $f_K \leqslant f_{n(t_i)}$).

Donc $\displaystyle 0 \leqslant A - \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{n(t_i)}(x)\mathrm{d}x \leqslant A - \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_K(x)\mathrm{d}x < \epsilon$ (d'après $(*)$).

D'où $S_3 \leqslant \epsilon$.

- On a :

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \left| \sum_{i=1}^{m} \left(f_{n(t_i)}(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{n(t_i)}(x)\mathrm{d}x \right) \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} \left| f_{n(t_i)}(x_i - x_{i-1}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{n(t_i)}(x)\mathrm{d}x \right|
\end{aligned}
$$

Soit $A_p = \{t_i \mid n(t_i) = p\}$ où p fixé. Puisque $\mathcal{Q}$ est δ-fine, $(([x_{i-1}, x_i], t_i) \mid n(t_i) = p)_{i=1}^{m}$ vérifie $t_i - \delta(t_i) \leqslant t_i \leqslant t_i + \delta(t_i)$ pour tout i tel que $n(t_i) = p$. Par le lemme de Henstock 3.1.1 on a donc :

$$
\sum_{t_i \in A_p} \left| f_{n(t_i)}(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{n(t_i)}(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{2\epsilon}{2^{n(t_i)+1}} \quad \text{(d'après } (**))
$$

Donc $S_2 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2^p} = \epsilon$.

D'où $|\mathcal{S}(f, \mathcal{Q}) - A| \leqslant \epsilon(b - a) + \epsilon + \epsilon = \epsilon(2 + b - a)$.

Donc f est $\mathcal{HK}$-intégrable avec $A = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. □

Remarque : On peut avoir un énoncé similaire pour l'intégrale de Lebesgue : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables convergeant simplement vers une fonction f et telle que la suite $\left(\int_a^b f_n\right)$ soit majorée. Posons $g_n = f_n - f_0$. Alors $(g_n)_n$ est une suite croissante de fonctions positives. Soit $g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$. Par le théorème de convergence monotone pour Lebesgue B.0.5, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n \mathrm{d}\lambda = \int_a^b g \mathrm{d}\lambda$. On a $\int_a^b g_n \mathrm{d}\lambda = \int_a^b f_n \mathrm{d}\lambda - \int_a^b f_0 \mathrm{d}\lambda$ $(*)$ et puisque $\left(\int_a^b f_n\right)$ est majorée on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n \mathrm{d}\lambda = \int_a^b g \mathrm{d}\lambda < +\infty$. D'où $g + f_0 = \lim_{n\to+\infty} f_n$ est intégrable et en ajoutant $\int_a^b f_0$ à chaque membre de l'égalité $(*)$ on a $\int_a^b f \mathrm{d}\lambda = \int_a^b g \mathrm{d}\lambda + \int_a^b f_0 \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n \mathrm{d}\lambda - \int_a^b f_0 \mathrm{d}\lambda + \int_a^b f_0 \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n \mathrm{d}\lambda$.

Exemple : Soit $f_n : [1,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-nx^2}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n continue sur $[1,2]$ donc $\mathcal{R}$-intégrable donc $\mathcal{HK}$-intégrable. La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et converge vers $f \equiv 1$.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_1^2 f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 1\mathrm{d}x = 1$
Par le théorème de convergence monotone 3.1.1 il vient :

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 1$$

3.2 Caractérisation de l'absolue-intégrabilité

Dans ce paragraphe nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit de valeur absolue intégrable, de laquelle nous déduirons un résultat important : si une fonction est majorée en valeur absolue par une fonction intégrable alors elle est de valeur absolue intégrable.

Lemme 3.2.1. *Soient $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ une jauge et $E = \{c_1, ..., c_n\} \subseteq [a,b]$.*
Notons $\tilde{\delta} : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $\tilde{\delta}(x) = \min\left\{\delta(x), \frac{1}{2}d(x, E \setminus \{x\})\right\}$.
Alors $\tilde{\delta}$ est une jauge qui a de plus la propriété suivante :
Si $\mathcal{P} = ([x_{i-1}, x_i], t_i)_{i=1}^p$ est une subdivision pointée $\tilde{\delta}$-fine de $[a,b]$ alors $E \subseteq \{t_i, 1 \leqslant i \leqslant p\}$. Plus précisement si $c_j \in [x_{i-1}, x_i]$ alors $c_j = t_i$.

Démonstration. Soient $\mathcal{P} = ([x_{i-1}, x_i], t_i)_{i=1}^p$ une subdivision pointée $\tilde{\delta}$-fine de $[a,b]$ et $c_j \in [x_{i-1}, x_i]$. Raisonnons par l'absurde en supposant $c_j \neq t_i$.
Si $c_j > t_i$ alors $\tilde{\delta}(t_i) \leqslant \frac{1}{2}(c_j - t_i)$ donc $x_i < t_i + \tilde{\delta}(t_i) \leqslant \dfrac{c_j + t_i}{2} < c_j$, ce qui est absurde.
Si $c_j < t_i$ alors $\tilde{\delta}(t_i) \leqslant \frac{1}{2}(t_i - c_j)$ donc $x_{i-1} > t_i - \tilde{\delta}(t_i) \geqslant \dfrac{c_j + t_i}{2} > c_j$, ce qui est absurde.
Donc $c_j = t_i$. □

Remarque : Dans la situation précédente on forme une subdivision pointée $\tilde{\mathcal{P}} = ([u_{i-1}, u_i], s_i)_{i=1}^q$ en divisant chaque intervalle $([x_{i-1}, x_i], c_j)$, pour lequel $c_j \in]x_{i-1}, x_i[$, en deux : $([x_{i-1}, c_j], c_j)$ et $([c_j, x_i], c_j)$.

$\tilde{\mathcal{P}}$ est $\tilde{\delta}$-fine et pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $S(f, \tilde{\mathcal{P}}) = S(f, \mathcal{P})$.

En effet, d'après le lemme 3.2.1, si c_j appartient à un intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ alors c_j est le point de marquage de cet intervalle. On a alors dans la nouvelle subdivision pointée les deux nouveaux intervalles $[x_{i-1}, c_j]$ et $[c_j, x_i]$ ce qui nous donne dans la somme de Riemann :

$$f(c_j)(c_j - x_{i-1}) + f(c_j)(x_i - c_j) = f(c_j)(x_i - x_{i-1}) = f(t_j)(x_i - x_{i-1})$$

ce qui correspond au $j^{\text{ème}}$ terme de la somme de Riemann de la subdivision $\mathcal{P}$.
Par sommation sur tous les intervalles redécoupés on en déduit l'égalité des deux sommes de Riemann.

Théorème 3.2.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{HK}$-intégrable.*
On a $|f|$ $\mathcal{HK}$-intégrable si et seulement si $\sup_{\{J_i\}_{i=1}^p} \sum_{i=1}^{p} \left| \int_{J_i} f(x)\mathrm{d}x \right| < +\infty$
où le sup est pris sur toutes les subdivisions $\{J_i\}$ de l'intervalle $[a, b]$.

Démonstration. $(\Rightarrow)$ Soient $|f|$ $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a, b]$ et $\{J_i\}_{i=1}^p$ une subdivision de $[a, b]$. Comme $\forall x \in [a, b]\,,\ -|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, par croissance de l'intégrale on a $\forall i \in [\![1, p]\!],\ -\int_{J_i} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{J_i} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{J_i} |f(x)|\,\mathrm{d}x$
et donc $\left| \int_{J_i} f(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_{J_i} |f(x)|\,\mathrm{d}x$,
d'où $\sum_{i=1}^{p} \left| \int_{J_i} f(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \int_{J_i} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ et le sup est donc fini.

$(\Leftarrow)$ Soit $\epsilon > 0$, il existe une subdivision $\{[c_{i-1}, c_i]\}_{i=1}^n$ de $[a, b]$ telle que $S - \epsilon < \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{c_{i-1}}^{c_i} f \right| \leqslant S$ où $S = \sup_{\{I_i\}} \sum_{i=1}^{p} \left| \int_{I_i} f \right|$.

Puisque f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,b]$, il existe une jauge δ telle que pour tout $\mathcal{P}$ subdivision pointée δ-fine on a $\left|S(f,\mathcal{P}) - \int_a^b f\right| < \epsilon$. Le lemme 3.2.1 appliqué avec $E = \{c_o, \ldots, c_n\}$ nous donne une jauge $\tilde{\delta} \leqslant \delta$. Soit $\mathcal{P}$ une subdivision pointée $\tilde{\delta}$-fine. On considère $\tilde{\mathcal{P}}$ construit comme dans la remarque précédente. On a $S(|f|, \tilde{\mathcal{P}}) = S(|f|, \mathcal{P})$.
Notons $\{[u_{i-1}, u_i], s_i\}_{i=1}^q$ la subdivision pointée $\tilde{\mathcal{P}}$. Par le lemme de Henstock 3.1.1, puisque $\tilde{\mathcal{P}}$ est $\tilde{\delta}$-fine, elle est également δ-fine et on a

$$\sum_{i=1}^{q} \left| f(s_i)(u_i - u_{i-1}) - \int_{u_{i-1}}^{u_i} f \right| \leqslant 2\epsilon \qquad (*)$$

et alors

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^{q} |f(s_i)| \, |u_i - u_{i-1}| - \left| \int_{u_{i-1}}^{u_i} f \right| \right| &\leqslant \sum_{i=1}^{q} \left| |f(s_i)(u_i - u_{i-1})| - \left| \int_{u_{i-1}}^{u_i} f \right| \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{q} \left| f(s_i)(u_i - u_{i-1}) - \int_{u_{i-1}}^{u_i} f \right| \\
&\leqslant 2\epsilon \quad \text{par } (*)
\end{aligned}$$

On a donc $\left| S(|f|, \tilde{\mathcal{P}}) - \sum_{i=1}^{q} \left| \int_{u_{i-1}}^{u_i} f \right| \right| \leqslant 2\epsilon$.
Puisque les segments $[c_{i-1}, c_i]$ sont des unions de segments d'extrémités u_k on a par Chasles et l'inégalité triangulaire que

$$S - \epsilon \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{c_{i-1}}^{c_i} f \right| \leqslant \sum_{i=1}^{q} \left| \int_{u_{i-1}}^{u_i} f \right| \leqslant S$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
|S(|f|, \mathcal{P}) - S| &\leqslant \left| S(|f|, \tilde{\mathcal{P}}) - \sum_{i=1}^{q} \left| \int_{u_{i-1}}^{u_i} f \right| \right| + \left| S - \sum_{i=1}^{q} \left| \int_{u_{i-1}}^{u_i} f \right| \right| \\
&\leqslant 2\epsilon + \epsilon = 3\epsilon.
\end{aligned}$$

D'où $|f|$ est $\mathcal{HK}$-intégrable d'intégrale S. $\square$

Corollaire 3.2.1. *Soient $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{HK}$-intégrables telles que $\forall x \in [a,b]\,,\ |f(x)| \leqslant g(x)$. Alors $|f|$ est $\mathcal{HK}$-intégrable et*

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration. Soit $\{J_i\}_{i=1}^p$ une subdivision de $[a,b]$.
Puisque $\forall x \in [a,b]\,,\ -g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, par croissance de l'intégrale on a :
$\forall i \in [\![1,p]\!],\ -\displaystyle\int_{J_i} g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{J_i} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{J_i} g(x)\mathrm{d}x$, ie $\left|\displaystyle\int_{J_i} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \displaystyle\int_{J_i} g(x)\mathrm{d}x$
et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^p \left|\int_{J_i} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \sum_{i=1}^p \int_{J_i} g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ (par Chasles).
Donc $\displaystyle\sup_{\{J_i\}_{i=1}^p} \sum_{i=1}^p \left|\int_{J_i} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < +\infty$ et $|f|$ est $\mathcal{HK}$-intégrable d'après le théorème 3.2.1.
Maintenant on sait déjà que $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$, et on a
$\forall x \in [a,b]\,,\ |f(x)| \leqslant g(x)$ donc $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \displaystyle\int_{J_i} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{J_i} g(x)\mathrm{d}x$. D'où
$\displaystyle\sum_{i=1}^p \int_{J_i} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^p \int_{J_i} g(x)\mathrm{d}x$, ie $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. □

3.3 Théorème de convergence dominée

Avant de démontrer le théorème de convergence dominée, nous avons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 3.3.1. *Soient $(f_k)_k, g$ des fonctions $\mathcal{HK}$-intégrables sur un intervalle $I = [a,b]$ et telles que $g(x) \leqslant f_k(x)$ pour $x \in I, k \in \mathbb{N}$.*
Alors $\inf\{f_k\}$ *est $\mathcal{HK}$-intégrable.*

Démonstration. Puisque $g \leqslant f_k$ sur I, $\inf\{f_k\}$ existe et $\inf\{f_k\} \geqslant g$. Posons $h_k = \inf\{f_i, 1 \leqslant i \leqslant k\}$ Montrons que h_k est $\mathcal{HK}$-intégrable. Puisque $h_k = \inf\{h_{k-1}, f_k\}$, il suffit de montrer le résultat pour h_2.

Puisque $g \leqslant f_1$ et $g \leqslant f_2$ on a $g \leqslant \inf\{f_1, f_2\} = h_2$ et donc $-h_2 \leqslant -g$. Or $h_2 = \frac{f_1+f_2-|f_1-f_2|}{2}$ donc on a $0 \leqslant |f_1 - f_2| = f_1 + f_2 - 2h_2$, d'où $0 \leqslant |f_1 - f_2| \leqslant f_1 + f_2 - 2g$. Or, puisque $f_1 + f_2 - 2g$ est $\mathcal{HK}$-intégrable, $|f_1 - f_2|$ l'est aussi par le corollaire 3.2.1 et donc $h_2 = \frac{f_1+f_2-|f_1-f_2|}{2}$ également.

On en déduit que h_k est $\mathcal{HK}$-intégrable et puisque la suite $(h_k)_k$ décroît sur I vers $\inf\{f_k\}$, le théorème de convergence monotone 3.1.1 permet d'affirmer que $\inf\{f_k\} = \lim\limits_{i\to+\infty} h_i$ est $\mathcal{HK}$-intégrable. □

Lemme 3.3.2. ***(de Fatou)*** *Soient $(f_k)_k$, g des fonctions $\mathcal{HK}$-intégrables sur I telles que $g(x) \leqslant f_k(x)$ pour $x \in I$, $k \in \mathbb{N}$ et avec $\liminf\limits_{k\to\infty} \int_I f_k < \infty$. Alors $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$ est $\mathcal{HK}$-intégrable sur I et*

$$-\infty < \int_I \liminf_{k\to\infty} f_k \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_I f_k < \infty$$

Démonstration. Si $\phi_k = \inf\{f_m : m \geqslant k, m \in \mathbb{N}\} \quad \forall k \in \mathbb{N}$, alors ϕ_k est $\mathcal{HK}$-intégrable d'après le lemme 3.3.1. Puisque $g(x) \leqslant \phi_k(x) \leqslant f_k(x) \quad \forall x \in I$, $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_I g \leqslant \int_I \phi_k \leqslant \int_I f_k$$

Par propriété de la borne inférieure on a :

$$\int_I g \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_I \phi_k \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_I f_k$$

La suite $(\phi_k)_k$ est croissante et converge sur I vers $\phi = \liminf f_k$. D'où, d'après l'inégalité précédente, la suite croissante $(\int_I \phi_k)$ converge et est majorée.
D'après le théorème de convergence monotone 3.1.1 on a alors que
$\phi = \lim \phi_k = \liminf f_k$ est $\mathcal{HK}$-intégrable et $\int_I \phi = \lim\limits_{k\to\infty} \int_I \phi_k \in \mathbb{R}$.
On obtient ainsi l'inégalité souhaitée. □

Théorème 3.3.1. ***(Convergence dominée)*** *Soit (f_k) une suite de fonctions $\mathcal{HK}$-intégrables sur $I = [a,b]$ avec $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)\ \forall x \in I$. On suppose qu'il existe g, h deux fonctions $\mathcal{HK}$-intégrables telles que $g(x) \leqslant f_k(x) \leqslant h(x)$ pour $x \in I,\quad k \in \mathbb{N}$.*
Alors f est $\mathcal{HK}$-intégrable et $\displaystyle\int_I f = \lim_{k\to\infty} \int_I f_k$

Démonstration. On a $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \liminf f_k(x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in I$. On en déduit :

$$\int_I g \leqslant \int_I f_k \leqslant \int_I h \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

avec $\liminf \int_I f_k$ et $\limsup \int_I f_k \in \mathbb{R}$. D'après le lemme de Fatou 3.3.2, f est $\mathcal{HK}$-intégrable et

$$\int_I f \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_I f_k$$

Si on applique le lemme de Fatou 3.3.2 à la suite $(-f_k)$ et en utilisant le fait que $\liminf(-g_k) = -\limsup g_k$ on en conclut alors que :

$$-\int_I f = \int_I (-f) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_I (-f_k) = -\limsup_{k\to\infty} \int_I f_k$$

Il vient que $\displaystyle\limsup_{k\to\infty} \int_I f_k \leqslant \int_I f$. On a donc $\displaystyle\limsup_{k\to\infty} \int_I f_k \leqslant \int_I f \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_I f_k$.
D'où $\displaystyle\int_I f = \lim_{k\to\infty} \int_I f_k$. □

Exemple : Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{n\cos x}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\cos x > 0$ sur $[0,1]$ donc f_n est continue donc $\mathcal{HK}$-intégrable. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{x}{\cos x} \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ avec $x \mapsto -\dfrac{x}{\cos x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{2}$ $\mathcal{HK}$-intégrables.
De plus, $\forall x \in [0,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{2}$.

Par le théorème de convergence dominée 3.3.1 on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \frac{1}{2}$

Chapitre 4

Liens entre les intégrales de Henstock-Kurzweil et de Lebesgue

Dans ce dernier chapitre, nous nous intéressons aux liens entre l'intégrale de Lebesgue et celle de Henstock-Kurzweil. Nous montrerons notamment que l'ensemble des fonctions $\mathcal{L}$-intégrables sur un intervalle $[a, b]$ est inclus dans l'ensemble des fonctions $\mathcal{HK}$-intégrables.

4.1 Premières comparaisons

Pour montrer que les fonctions $\mathcal{L}$-intégrables sont $\mathcal{HK}$-intégrables, nous commençons par prouver le résultat pour les fonctions en escalier.

Lemme 4.1.1. *Les fonctions en escalier sont $\mathcal{HK}$ et $\mathcal{L}$-intégrables sur $[a, b]$ et les intégrales coïncident.*

Démonstration. On montre d'abord le résultat pour une fonction indicatrice d'un intervalle. Soit $I \subset [a, b]$ un intervalle. Soit $f = \mathbf{1}_I$. f est nulle sur $[a, b] \setminus I$ donc $\mathcal{HK}$-intégrable d'intégrale nulle sur cet intervalle. Sur I elle

est $\mathcal{HK}$-intégrable d'intégrale égale à $\lambda(I)$. D'après Chasles 1.2.3 f est alors $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,b]$ d'intégrale $\lambda(I)$. f est également $\mathcal{L}$-intégrable sur $[a,b]$ de même intégrale. D'où le résultat pour une fonction indicatrice d'un intervalle.
Puisque qu'une fonction en escalier est une combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'intervalles, on en déduit le résultat par linéarité de l'intégrale.

$\square$

Théorème 4.1.1. *Soit f une fonction $\mathcal{L}$-intégrable sur $[a,b]$. Alors f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,b]$ et*

$$\mathcal{HK}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathcal{L}\int_{[a,b]} f\mathrm{d}\lambda$$

Démonstration. **Partie 1 :**
Montrons le résultat pour les fonctions indicatrices d'un sous-ensemble ouvert O de $[a,b]$. Par la proposition B.0.4, on peut écrire O comme réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts I_n : $O = \sqcup I_n$.

Soit $f_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{I_i}$. La suite $(f_n)_n$ est croissante et converge simplement vers $f = \mathbf{1}_O$. De plus par le lemme 4.1.1, les f_n sont $\mathcal{HK}$-intégrables.

Soit $x \in [a,b]$. Si $x \in [a,b] \setminus O$, $f_n(x) = 0$.
Si $x \in O$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $x \notin I_i$, $\forall i \neq N$ et $x \in I_N$ (car I_n disjoints).

On a alors $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < N \\ 1 & \text{si } n \geqslant N \end{cases}$
Ainsi $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ sur $[a,b]$ et donc $0 \leqslant \mathcal{HK}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant b-a$, ie $\left(\mathcal{HK}\int_a^b f_n\right)_n$ est bornée. On peut alors appliquer le théorème de convergence monotone 3.1.1 et il vient :

$$\begin{aligned}\mathcal{HK}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\mathcal{HK}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\mathcal{L}\int_{[a,b]} f_n\mathrm{d}\lambda \quad \text{(par le lemme 4.1.1)} \\ &= \mathcal{L}\int_{[a,b]} f\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

Montrons maintenant le résultat pour les fonctions indicatrices d'un ensemble mesurable. Soit G un ensemble Lebesgue-mesurable, d'après la proposition B.0.3 en annexe B, on peut le recouvrir par une suite décroissante $(G_n)_n$ d'ouverts telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda(G_n) = \lambda(G)$.

Soit $g_n = \mathbf{1}_{G_n}$. La suite $(g_n)_n$ est décroissante et converge simplement vers $g = \mathbf{1}_G$. On a $0 \leqslant g_n \leqslant 1$ donc la suite $\left(\mathcal{HK}\int_a^b g_n\right)_n$ est bornée et alors, d'après les théorèmes de convergence monotone pour Henstock-Kurzweil 3.1.1 et pour Lebesgue B.0.5 :

$$\mathcal{HK}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{HK}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}\int_{[a,b]} g_n \mathrm{d}\lambda = \mathcal{L}\int_{[a,b]} g\mathrm{d}\lambda$$

Les fonctions étagées étant des combinaisons linéaires de fonctions indicatrices sur des ensembles mesurables, elles sont $\mathcal{HK}$ et $\mathcal{L}$-intégrables de même intégrale.

Partie 2 :
Soit f une fonction positive, $\mathcal{L}$-intégrable sur $[a,b]$. D'après la proposition B.0.1, il existe une suite croissante $(f_n)_n$ de fonctions mesurables étagées convergeant simplement vers f sur $[a,b]$. Alors,

$$\mathcal{HK}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \mathcal{L}\int_{[a,b]} f_n \mathrm{d}\lambda \leqslant \mathcal{L}\int_{[a,b]} f\mathrm{d}\lambda < \infty$$

On applique les théorèmes de convergence monotone pour Henstock-Kurzweil 3.1.1 et pour Lebesgue B.0.5 et il vient :

$$\mathcal{HK}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{HK}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}\int_{[a,b]} f_n \mathrm{d}\lambda = \mathcal{L}\int_{[a,b]} f\mathrm{d}\lambda$$

Partie 3 :
Soit f une fonction $\mathcal{L}$-intégrable sur $[a,b]$. On a $f = f^+ - f^-$.

De plus, $f \in \mathcal{L}^1([a,b]) \Leftrightarrow f^+ \in \mathcal{L}^1([a,b])$ et $f^- \in \mathcal{L}^1([a,b])$.

D'après la partie 2, f^+ et f^- étant des fonctions positives, $\mathcal{L}$-intégrables sur $[a,b]$, elles sont $\mathcal{HK}$-intégrables et les intégrales coïncident. $f = f^+ - f^-$ est donc $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,b]$ et on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{HK}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathcal{HK}\int_a^b \left(f^+ - f^-\right)(x)\mathrm{d}x &= \mathcal{HK}\int_a^b f^+(x)\mathrm{d}x - \mathcal{HK}\int_a^b f^-(x)\mathrm{d}x \\ &= \mathcal{L}\int_{[a,b]} f^+\mathrm{d}\lambda - \mathcal{L}\int_{[a,b]} f^-\mathrm{d}\lambda \\ &= \mathcal{L}\int_{[a,b]} f\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

□

Ce théorème est très important : il montre qu'en modifiant légèrement l'intégrale de Riemann, on obtient une nouvelle théorie de l'intégration qui englobe celle de Lebesgue dans le cas d'intervalles bornés.

Remarque : La réciproque est fausse.
En effet considérons $F(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right) & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
F est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1], F^{'}(x) = 2x\,\sin\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right) - \dfrac{2\pi}{x}\cos\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right)$.
Pour $x = 0$, $\dfrac{F(t)-F(0)}{t-0} = t\sin\left(\dfrac{\pi}{t^2}\right) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi $F^{'}(x) = \begin{cases} 2x\,\sin\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right) - \dfrac{2\pi}{x}\cos\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right) & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
Par le théorème fondamental de l'analyse 2.1.1, $F^{'}$ est $\mathcal{HK}$-intégrable et

$$\mathcal{HK}\int_0^1 F^{'}(x)\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \sin(\pi) = 0$$

Montrons que $F^{'}$ n'est pas $\mathcal{L}$-intégrable. On pose $g(x) = 2x\sin\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right)$ et $h(x) = \dfrac{2\pi}{x}\cos\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right)$. Ainsi $F'(x) = g(x) - h(x)$ sur $]0,1]$ et vaut 0 en 0.
On a $\displaystyle\int_{[0,1]} |g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 2$ donc g est $\mathcal{L}$-intégrable.
Supposons que F' est $\mathcal{L}$-intégrable. On a alors $h = g - F'$ $\mathcal{L}$-intégrable. Montrons que ce n'est pas le cas.

Posons $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ et $I_n = \displaystyle\int_{x_{n+1}}^{x_n} |g(x)|\mathrm{d}x = \int_{x_{n+1}}^{x_n} \frac{2\pi}{x} \left|cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)\right| \mathrm{d}x$

On calcule I_n en effectuant le changement de variable $y = \dfrac{\pi}{x^2}$.

On a $\dfrac{1}{x} = \sqrt{\dfrac{y}{\pi}}$ donc $\mathrm{d}y = -2\dfrac{y\sqrt{y}}{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}x$ ie $-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2y\sqrt{y}}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$.

D'où

$$\begin{aligned}
I_n = \int_{\frac{\pi}{{x_{n+1}}^2}}^{\frac{\pi}{{x_n}^2}} 2\pi\sqrt{\frac{y}{\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{-2y\sqrt{y}}\,|cos(y)|\mathrm{d}y &= \pi\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+3)\pi} \frac{1}{y}|cos(y)|\mathrm{d}y \\
&\geqslant \pi\frac{1}{(2n+1)\pi}\int_{2n\pi+\pi}^{2n\pi+3\pi} |cos(y)|\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2n+1}\underbrace{\int_{\pi}^{3\pi} |cos(y)|\mathrm{d}y}_{=4} \\
&= \frac{4}{2n+1}
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 |g(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{2n+1} = +\infty$ donc g n'est pas $\mathcal{L}$-intégrable et cela contredit ainsi l'intégrabilité de $F^{'}$.

En outre le théorème précédent nous permet de montrer une version du théorème fondamental pour Lebesgue.

Théorème 4.1.2. *Soit f dérivable partout sur $[a,b]$ avec $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$. Alors $f(b) - f(a) = \mathcal{L}\displaystyle\int_{[a,b]} f'(t)\mathrm{d}t$*

Démonstration. D'après le théorème fondamental 2.1.1, puisque f est dérivable partout sa dérivée f' est $\mathcal{HK}$-intégrable et $f(b)-f(a) = \mathcal{HK}\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t$. De plus par le théorème 4.1.1, puisque f' est $\mathcal{L}$-intégrable elle est $\mathcal{HK}$-intégrable et les intégrales coïncident. D'où le résultat. □

Le théorème suivant, démontré dans le prochain paragraphe, nous permet de montrer que, dans le cas de fonctions positives, l'intégrabilité au sens de Henstock-Kurzweil et de Lebesgue est la même.

Théorème 4.1.3. *Soit f une fonction $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a, b]$. Alors f est mesurable.*

Proposition 4.1.1. *Si f est positive sur $[a, b]$ alors f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$.*

Démonstration. ($\Leftarrow$) f $\mathcal{L}$-intégrable $\Rightarrow$ f $\mathcal{HK}$-intégrable d'après le théorème 4.1.1 (et on n'a pas besoin de la positivité de f).

($\Rightarrow$) Soit f $\mathcal{HK}$-intégrable et positive sur $[a, b]$. On sait d'après le théorème 4.2.3 qu'elle est mesurable. Montrons que f est $\mathcal{L}$-intégrable. Puisque f est mesurable, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de fonctions étagées qui converge simplement vers f sur $[a, b]$. Les f_n sont $\mathcal{L}$-intégrables donc $\mathcal{HK}$-intégrables par le théorème 4.1.1.
Puisque la suite $\left(\mathcal{HK}\int_a^b f_n\right)$ est majorée par $\mathcal{HK}\int_a^b f$ on peut appliquer les théorèmes de convergence monotone 3.1.1 pour Henstock-Kurzweil et B.0.5 pour Lebesgue qui nous donnent :

$$\mathcal{L}\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}\int_{[a,b]} f_n = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{HK}\int_a^b f_n = \mathcal{HK}\int_a^b f$$

Ainsi $\mathcal{L}\int_{[a,b]} |f| = \mathcal{L}\int_{[a,b]} f < +\infty$, donc $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$ $\square$

Corollaire 4.1.1. *$f \in \mathcal{L}^1([a, b])$ si et seulement si f et $|f|$ sont $\mathcal{HK}$-intégrables sur $[a, b]$.*

Démonstration. ($\Leftarrow$) Soit f telle que f et $|f|$ soient $\mathcal{HK}$-intégrables sur $[a, b]$. En particulier, puisque $|f|$ est positive et $\mathcal{HK}$-intégrable , par la proposition 4.1.1, on a que f est mesurable et $|f|$ est $\mathcal{L}$-intégrable, c'est-à-dire $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$.

(⇒) : Soit f une fonction $\mathcal{L}$-intégrable sur $[a,b]$. On sait par le théorème 4.1.1 que $f \in \mathcal{HK}([a,b])$. On a également $|f| \in \mathcal{L}^1([a,b])$ donc $|f|$ est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,b]$ par le théorème 4.1.1. □

Remarque : f $\mathcal{HK}$-intégrable $\not\Rightarrow$ $|f|$ $\mathcal{HK}$-intégrable

Considérons $F(x) = \begin{cases} x^2 sin\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right) & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Voir l'exemple page 42.

Remarque : Par ailleurs il n'y a pas de semi-convergence pour l'intégrale de Lebesgue : il n'y a pas de fonction intégrable f telle que $|f|$ n'est pas intégrable car $|f| \in \mathcal{L}^1([a,b])$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$.
Par contre il y a de la semi-convergence pour l'intégrale de Henstock-Kurzweil. D'ailleurs le corollaire 4.1.1 ci-dessus signifie grossièrement que "l'intégrale de Henstock-Kurzweil est l'extension semi-convergente de l'intégrale de Lebesgue".

4.2 Deuxième théorème fondamental

Dans ce paragraphe nous nous intéressons au deuxième théorème fondamental qui affirme que si f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,b]$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable presque partout de dérivée f, et duquel nous déduisons la mesurabilité des fonctions $\mathcal{HK}$-intégrables. Nous commençons par montrer la continuité de F.

Proposition 4.2.1. *Soit f une fonction $\mathcal{HK}$-intégrable sur un intervalle $[a,b]$. Alors la fonction $F : x \in [a,b] \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est continue sur $[a,b]$.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,b]$ donc il existe une jauge δ_ϵ telle que pour toute subdivision pointée δ_ϵ-fine $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ on ait :

$$\left|S(f,\mathcal{P}) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| < \epsilon$$

- Soit δ une nouvelle jauge sur $[a,b]$ définie par :

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\left\{\frac{1}{2}\left|x-c\right|, \delta_\epsilon(x)\right\} & \text{si } x \neq c \\ \min\left\{\delta_\epsilon(c), \dfrac{\epsilon}{|f(c)|+1}\right\} & \text{si } x = c \end{cases}$$

Pour toute subdivision pointée $\mathcal{P}$ δ-fine de $[a,b]$, c est un point de marquage. En effet, soient k l'entier tel que $c \in [x_{k-1}, x_k]$ et t_k le point de marquage de cet intervalle.
Si $t_k < c$ alors $t_k + \delta(t_k) \leqslant t_k + \frac{1}{2}(c - t_k) = \frac{1}{2}(t_k + c) < x_k$.
Si $t_k > c$ alors $t_k + \delta(t_k) \leqslant t_k + \frac{1}{2}\underbrace{(t_k - c)}_{>0} < x_k$.

Dans les deux cas on a une contradiction avec $\mathcal{P}$ δ-fine donc $t_k = c$.

Pour $x \in]c-\delta(c), c+\delta(c)[\cap [a,b]$, ie $|x-c| < \delta(c)$, le lemme de Henstock 3.1.1 appliqué à $(c,[x,c])$ et à $(c,[c,x])$ nous donne :

$$\left|f(c)(c-x) - \int_x^c f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad \left|f(c)(x-c) - \int_c^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \epsilon$$

ie $|f(c)(c-x) - (F(c) - F(x))| \leqslant \epsilon$ et $|f(c)(x-c) - (F(x) - F(c))| \leqslant \epsilon$

Donc $|F(x) - F(c)| \leqslant \epsilon + |f(c)|\,|x-c| < \epsilon + |f(c)| \dfrac{\epsilon}{|f(c)|+1} < 2\epsilon$ pour tout x tel que $|x-c| < \delta(c)$.

Cela montre la continuité de F en c.

- On montre avec un raisonnement similaire la continuité de F en a et b. $\square$

Pour démontrer le deuxième théorème fondamental, nous avons besoin du théorème de recouvrement de Vitali.

Définition 4.2.1. *Soit $E \subseteq [a,b]$ et soit $\mathcal{F}$ une famille de sous intervalles fermés non dégénérés de $[a-1,b+1]$. On dit que $\mathcal{F}$ est un recouvrement de Vitali de E si $\forall x \in E$, $\forall s > 0$, il existe un intervalle $J \in \mathcal{F}$ tel que $x \in J$ et $0 < l(J) < s$.*

Théorème 4.2.1. ***(Théorème de recouvrement de Vitali)*** *Soient $E \subseteq [a,b]$ et $\mathcal{F}$ un recouvrement de Vitali de E. Etant donné $\epsilon > 0$, il existe $I_1, ..., I_p$ des intervalles disjoints de $\mathcal{F}$ et une famille dénombrable d'intervalles fermés $\{J_i : \ i \geqslant p+1\}$ de $\mathbb{R}$ avec :*

$$E - \bigcup_{i=1}^{p} I_i \subseteq \bigcup_{i=p+1}^{\infty} J_i \ \text{ et } \ \sum_{i=p+1}^{\infty} l(J_i) \leqslant \epsilon$$

De plus, il vient que :

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} I_i \cup \bigcup_{i=p+1}^{\infty} J_i$$

Démonstration. Voir la preuve A en annexe A. □

Théorème 4.2.2. ***(Deuxième théorème fondamental de l'analyse)*** *Soit f une fonction $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,b]$ et F définie sur $[a,b]$ par :*

$$F(x) = \mathcal{HK} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Alors F est dérivable λ-pp et $F' = f$ λ-pp.

Démonstration. Montrons que les dérivées de Dini à droite
$F'_+ = \lim\limits_{h \to 0^+} \sup \left\{ \dfrac{F(y) - F(x)}{y - x}, x < y < x + h \right\}$
et $F'_- = \lim\limits_{h \to 0^+} \inf \left\{ \dfrac{F(y) - F(x)}{y - x}, x < y < x + h \right\}$ sont égales à f λ-pp.

- Soit $E = \big\{ x \in [a,b] \mid F'_+(x) \neq f(x) \big\}$. Donc $\forall x \in E$, $F'_+(x) \neq f(x)$.

1er cas : Si $F'(x) > f(x)$ alors $\forall h > 0, \exists y_{x,h} \in [x, x+h] \cap [a,b]$ tel que :

$$\frac{F(y_{x,h}) - F(x)}{y_{x,h} - x} > f(x) + \eta_x \text{ avec } \eta_x > 0$$

On a ainsi $F(y_{x,h}) - F(x) - f(x)(y_{x,h} - x) > \eta_x(y_{x,h} - x)$.

2ème cas : Si $F'(x) < f(x)$ alors $\forall h > 0, \exists y_{x,h} \in [x, x+h] \cap [a,b]$ tel que :

$$\frac{F(y_{x,h}) - F(x)}{y_{x,h} - x} < f(x) - \eta_x \text{ avec } \eta_x > 0$$

Donc $\forall x \in E, \forall h > 0, \exists y_{x,h} \in [x, x+h] \cap [a,b]$ tel que :

$$|F(y_{x,h}) - F(x) - f(x)(y_{x,h} - x)| > \eta_x(y_{x,h} - x), \text{ pour } \eta_x > 0$$

A chaque x on associe un $\eta_x > 0$. Alors $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \underbrace{\left\{ x \in E \mid \eta_x > \frac{1}{n} \right\}}_{E_n}$.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, E_n$ est λ-négligeable de sorte que E le soit également. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et soit $\epsilon > 0$. Puisque f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,b]$, il existe une jauge δ_ϵ telle que si $\mathcal{P}$ est une subdivision pointée δ_ϵ-fine de $[a,b]$ on ait :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| < \frac{\epsilon}{n}$$

La famille $A = \{[x, y_{x,h}] \mid x \in E_n,\ x < y_{x,h} < x + h < x + \delta_\epsilon(x)\}$ forme un recouvrement de Vitali de E_n. En effet, A est une famille d'intervalles fermés telle que $\forall x \in E_n, \forall s > 0, \exists I \in A$ tel que $x \in I$ et $l(I) < s$ car on peut choisir $h > 0$ aussi petit que l'on veut.
Par le théorème de recouvrement de Vitali 4.2.1, on a une famille finie $\{[x_1, y_{x_1,h_1}], \dots [x_M, y_{x_M,h_M}]\}$ d'intervalles fermés disjoints, $x_1, \dots, x_M \in E_n$ tels que $E_n \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{M} [x_m, y_{x_m,h_m}] \right) \subseteq B$ borélien où $\lambda(B) \leqslant \epsilon$.
Or, par définition, $x_m \in [x_m, y_{x_m,h_m}] \subset [x_m - \delta_\epsilon(x_m), x_m + \delta_\epsilon(x_m)]$.

Par le lemme de Henstock 3.1.1, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{2\epsilon}{n} &\geqslant \sum_{m=1}^{M} \left| f(x_m)\left(y_{x_m,h_m} - x_m\right) - \int_{x_m}^{y_{x_m,h_m}} f(t)\mathrm{d}t \right| \\
&= \sum_{m=1}^{M} \left| f(x_m)\left(y_{x_m,h_m} - x_m\right) - \left[F(y_{x_m,h_m}) - F(x_m)\right] \right| \\
&> \sum_{m=1}^{M} \eta_{x_m}\left(y_{x_m,h_m} - x_m\right) \\
&> \frac{1}{n}\lambda\left(\bigcup_{m=1}^{M} [x_m, y_{x_m,h_m}]\right)
\end{aligned}$$

Donc $E_n \subseteq B \bigcup \left(\bigcup_{m=1}^{M} [x_m, y_{x_m,h_m}]\right) := C_\epsilon$ et $\lambda(C_\epsilon) \leqslant 3\epsilon$.
Comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ on en déduit que E_n est λ-négligeable et donc E aussi.

On montre de même que la dérivée de Dini F'_+ à gauche est égale à f λ-pp.
Donc $\limsup_{h\to 0} \dfrac{F(y) - F(x)}{y - x}$ existe et vaut f λ-pp.

- On montre maintenant que $F'_-(x) = f(x)$ λ-pp $x \in [a, b]$.
On applique le résultat précédent à $-f$. Soit $G(x) = \int_a^x -f(t)\mathrm{d}t$. On a $G(x) = -F(x)$.
Ainsi $G'_+(x) = \limsup_{h\to 0^+} \left\{\dfrac{-F(y) + F(x)}{y - x}, x < y < x + h\right\} = -f(x)$ λ-pp $x \in [a, b]$.
Or $\limsup_{h\to 0^+} \left\{\dfrac{-F(y) + F(x)}{y - x}, x < y < x + h\right\} = -\liminf_{h\to 0^+} \left\{\dfrac{F(y) - F(x)}{y - x}, x < y < x + h\right\}$
donc $F'_-(x) = f(x)$ λ-pp $x \in [a, b]$.

On montre de même que la dérivée de Dini F'_- à gauche est égale à f λ-pp.
Donc $\liminf_{h\to 0} \dfrac{F(y) - F(x)}{y - x}$ existe et vaut f λ-pp.

Ainsi $\limsup_{h\to 0} \dfrac{F(y) - F(x)}{y - x} = \liminf_{h\to 0} \dfrac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x)$ λ-pp $x \in [a, b]$

donc $\lim_{h \to 0} \dfrac{F(y)-F(x)}{y-x}$ existe et vaut $f(x)$ λ-pp $x \in [a,b]$. $\square$

Théorème 4.2.3. *Soit f une fonction $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,b]$. Alors f est mesurable.*

Démonstration. D'après la proposition 4.2.1, la fonction F définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \mathcal{HK}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est continue sur $[a,b]$ et, d'après le deuxième théorème fondamental 4.2.2, dérivable presque partout de dérivée f'.

On pose $\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in [a,b] \\ F(b) & \text{si } x > b \end{cases}$

Soit $x \in [a,b]$, on définit $f_n(x) = \dfrac{\tilde{F}\left(x+\frac{1}{n}\right) - \tilde{F}(x)}{\frac{1}{n}}$. Puisque $\tilde{F}$ est continue, f_n est mesurable.

De plus, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = F'(x) = f(x)$ pp. D'où f est mesurable comme limite simple d'une suite de fonctions mesurables. $\square$

4.3 Complétude de l'intégrale de Henstock-Kurzweil

Théorème 4.3.1. ***(de Hake)*** *Soit $I = [a,b]$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Alors f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur I si et seulement si il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall c \in [a,b[$, f est intégrable sur $[a,c]$ et $\lim_{c \to b^-} \displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = A$.*

Dans ce cas, $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Démonstration. $(\Rightarrow)$ D'après la proposition 1.2.2, si $c \in [a,b[$, la restriction de f à $[a,c]$ est $\mathcal{HK}$-intégrable. Par la proposition 4.2.1,
$x \in [a,b] \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est continue en b, d'où $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$.

On a donc le résultat avec $A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(⇐) Supposons qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall c \in [a, b[$ la restriction de f à $[a, c]$ soit $\mathcal{HK}$-intégrable et que $\lim\limits_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = A$.
Soit $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite strictement croissante avec $a = c_0$ et $b = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.
Soit $\epsilon > 0$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $b - c_r \leqslant \dfrac{\epsilon}{|f(b)|+1}$ et tel que $\forall t \in [c_r, b[$ on ait $\left|\int_a^t f(x)\mathrm{d}x - A\right| \leqslant \epsilon$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et δ_k une jauge sur $I_k = [c_{k-1}, c_k]$ telle que si $\mathcal{P}_k$ est une subdivision pointée δ_k-fine de I_k alors : $\left|S(f, \mathcal{P}_k) - \int_{I_k} f\right| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2^k}$.

On peut supposer que :
(i) $\delta_1(c_0) \leqslant \frac{1}{2}(c_1 - c_0)$
et si $k \geqslant 1$,
(ii)$\delta_{k+1}(c_k) \leqslant \min\left\{\delta_k(c_k), \frac{1}{2}(c_k - c_{k-1}), \frac{1}{2}(c_{k+1} - c_k)\right\}$
(iii) $\delta_k(t) \leqslant \min\left\{\frac{1}{2}(t - c_{k-1}), \frac{1}{2}(c_k - t)\right\}, t \in]c_{k-1}, c_k[$

On définit alors une jaune δ sur I par :

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta_k(t) & \text{si } t \in [c_{k-1}, c_k[\\ b - c_r & \text{si t=b} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{P} = ([x_{i-1}, x_i]\, t_i)_{i=1}^n$ une subdivision pointée δ-fine de I.
Nécessairement $t_n = b$. En effet, si $t_n < b$, puisque $(c_k)_k$ croît strictement vers b, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $t_n \in [c_{k-1}, c_k[$.

- Si $t_n \neq c_{k-1}$, on a :

$$t_n + \delta(t_n) = t_n + \delta_k(t_n) \leqslant t_n + \frac{1}{2}(c_k - t_n) = \frac{1}{2}(c_k + t_n) < c_k < b$$

car b n'appartient à aucun I_k.

- Si $t_n = c_{k-1}$, on a :

$$t_n+\delta(t_n) = c_{k-1}+\delta(c_{k-1}) = c_{k-1}+\delta_k(c_{k-1}) \leqslant c_{k-1}+\frac{1}{2}(c_k-c_{k-1}) = \frac{1}{2}(c_k+c_{k-1}) < b$$

Dans tous les cas, cela contredit le fait que $\mathcal{P}$ est δ-fine donc $t_n = b$. On a alors $b - \delta(b) \leqslant x_{n-1}$, c'est-à-dire $c_r \leqslant x_{n-1}$.
Soit $s = \min \{n \in \mathbb{N}^* | x_{n-1} \leqslant c_n\}$. Alors $r \leqslant s$.

Soit $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{P} \cap [c_0, c_1]$, ..., $\mathcal{Q}_{s-1} = \mathcal{P} \cap [c_{s-2}, c_{s-1}]$, $\mathcal{Q}_s = \mathcal{P} \cap [c_{s-1}, x_{n-1}]$.
Puisque pour $k \in [\![1, s-1]\!]$, $\mathcal{Q}_k$ est une subdivision pointée δ_k-fine de I_k alors $\left|S(f, \mathcal{Q}_k) - \int_{I_k} f\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2^k}$.
Puisque $\mathcal{Q}_s$ est une subdivision pointée δ_s-fine de I_s, le lemme de Henstock 3.1.1 nous donne $\left|S(f, \mathcal{Q}_s) - \displaystyle\int_{c_{s-1}}^{x_{n-1}} f\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2^s}$.

Soit $\mathcal{Q}_b = ([x_{n-1}, b], b)$. Alors :

$$\begin{aligned}
|S(f, \mathcal{Q}_b)| = |f(b)(b - x_{n-1})| &\leqslant |f(b)|(b - c_r) \quad (\text{car } c_r \leqslant x_{n-1}) \\
&\leqslant |f(b)| \frac{\epsilon}{1 + |f(b)|} \\
&\leqslant \epsilon
\end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{P} = \mathcal{Q}_1 \cup ... \cup \mathcal{Q}_{s-1} \cup \mathcal{Q}_s \cup \mathcal{Q}_b$ on a :

$$\begin{aligned}
|S(f, \mathcal{P}) - A| &= \left| \sum_{i=1}^{s} S(f, \mathcal{Q}_i) + S(f, \mathcal{Q}_b) - A \right| \\
&\leqslant \left| \sum_{i=1}^{s} S(f, \mathcal{Q}_i) - \int_a^{x_{n-1}} f(t)\mathrm{d}t \right| + \left| \int_a^{x_{n-1}} f(t)\mathrm{d}t \right| + |S(f, \mathcal{Q})_b| \\
&\leqslant 3\epsilon
\end{aligned}$$

Cela montre que f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur I d'intégrale A. $\square$

Remarque : On dit que l'intégrale de Henstock-Kurzweil est complète.

Le théorème de Hake n'est plus vrai pour l'intégrale de Lebesgue. En effet, il existe $f \in \mathcal{L}^1([a, 1])$ $\forall\, 0 < a < 1$ pour laquelle $\displaystyle\lim_{a \to 0^+} \int_{[a,1]} f(x)\mathrm{d}x$ est finie mais $f \notin \mathcal{L}^1([0, 1])$.
Considérons $F(x) = \begin{cases} x \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

F est continue sur $[0,1]$.
On a, pour $x \neq 0$, $F'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + \frac{\pi}{x}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$
$\forall\, 0 < a < 1$, $F' \in \mathcal{L}^1([a,1])$ car continue sur $[a,1]$. Et de plus on sait que $\mathcal{L}\int_{[a,1]} F'(x)\mathrm{d}x = F(1) - F(a)$.
On a donc :

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0^+} \mathcal{L}\int_{[a,1]} F'(x)\mathrm{d}x &= F(1) - F(0) \text{ (car } F \text{ continue)}\\ &= F(1) = \cos(\pi) = -1\end{aligned}$$

Cependant $F' \notin \mathcal{L}^1([a,1])$, en effet on a :

$$|F'(x)| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + \frac{\pi}{x}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \geqslant \left|\left|\frac{\pi}{x}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| - \left|\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|\right| \geqslant \left|\frac{\pi}{x}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| - 1$$

Soient $a_n = \frac{1}{n}$ et $A_n = \int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{\pi}{x}\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \mathrm{d}x$.
En faisant le changement de variable $y = \frac{\pi}{x}$, on a :

$$\begin{aligned}A_n = \int_{\frac{\pi}{a_{n+1}}}^{\frac{\pi}{a_n}} \frac{\pi}{y}\,|sin(y)|\,\mathrm{d}y \geqslant a_{n+1}\int_{\frac{\pi}{a_{n+1}}}^{\frac{\pi}{a_n}} |sin(y)|\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{n+1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |sin(y)|\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{n+1}\int_0^{\pi} sin(y)\mathrm{d}y\\ &= \frac{2}{n+1}\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |F'(x)|\,dx \geqslant \int_0^1 \left(\frac{\pi}{x}\left|sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| - 1\right)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\pi}{x}\left|sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|\mathrm{d}x - 1\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n - 1\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1} - 1\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Donc $F' \notin \mathcal{L}^1([0,1])$.

Annexe A

Preuves de certains résultats

Théorème A.0.2. *L'ensemble de Cantor K est un compact de mesure nulle, non dénombrable.*

Démonstration. - On a $\forall n \geqslant 1$, K^n est une union de 2^n intervalles I_k^n. Les I_k^n étant des intervalles fermés de $[0,1]$ qui est compact, on en déduit que : $\forall n \geqslant 1$, K^n est compact.
K^n compact $\forall n \geqslant 1 \Rightarrow K = \bigcap_{n \geqslant 1} K^n$ compact.
Maintenant, $\forall n \geqslant 1$, $\lambda(K^n) = \dfrac{2^n}{3^n}$ car les intervalles I_k^n sont disjoints et de longueurs $\dfrac{1}{3^n}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\lambda(K) = \lambda\left(\bigcap_{n \geqslant 1} K^n\right) &= \lim_{n \to \infty} \lambda(K^n) \quad ((K^n)_{n \geqslant 1} \text{ décroissante}) \\
&= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi K est de mesure nulle.

- Il nous reste à présent à montrer que K est non dénombrable. Procédons par l'absurde en supposant K dénombrable. On écrit alors $K = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Construisons x dans K avec $x \neq x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
On a x_1 qui appartient à I_0^1 ou à I_2^1. Soit J_1 l'intervalle ne contenant pas x_1.
On réitère le procédé jusqu'à la construction de J_{n-1} et on pose J_n l'intervalle de $J_{n-1} \cap K$ ne contenant pas x_n.
On obtient une suite décroissante d'intervalles fermés non vides dans K compact donc l'intersection des J_n est non vide. En particulier elle contient un point $x \in K$ et tel que $\forall n \geqslant 1,\ x_n \notin J_n$ et $x \in J_n$. Donc $x \neq x_n$. On a une contradiction donc K n'est pas dénombrable. □

Lemme A.0.1. ***(de Henstock)*** *Soit f une fonction $\mathcal{HK}$-intégrable sur $[a,b]$ et, pour $\epsilon > 0$, soit δ_ϵ une jauge sur $[a,b]$ telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{P}$ δ_ϵ-fine de $[a,b]$,*

$$\left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{HK}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| < \epsilon$$

Soit $(F_j)_{j=1}^n$ une famille finie d'intervalles fermés de $[a,b]$ d'intérieurs disjoints 2 à 2 avec $y_j \in F_j \subset [y_j - \delta_\epsilon(y_j), y_j + \delta_\epsilon(y_j)]$. Alors :

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\left\{f(y_j)l(F_j) - \mathcal{HK}\int_{F_j} f(x)dx\right\}\right| \leqslant \epsilon$$

et

$$\sum_{j=1}^{n}\left|f(y_j)l(F_j) - \mathcal{HK}\int_{F_j} f(x)dx\right| \leqslant 2\epsilon$$

Démonstration. L'ensemble $[a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{n} F_j$ est une famille finie d'intervalles ouverts. On les complète en leur ajoutant leurs extrémités. On obtient une famille $(G_i)_{i=1}^n$ d'intervalles fermés. La réunion $\{G_i, i = 1,\ldots,m\} \cup \{F_j, j = 1,\ldots,n\}$ forme une subdivision pointée de $[a,b]$. f étant $\mathcal{HK}$-intégrable sur chaque G_i, déterminons une jauge sur G_i telle que la somme de Riemann de f sur G_i soit aussi petite que l'on veut.
Soit $\eta > 0$. Puisque f est $\mathcal{HK}$-intégrable sur chaque G_i, il existe une jauge $\delta_{\eta,i}$ sur G_i telle que pour toute subdivision pointée $\mathcal{Q}_i$ $\delta_{\eta,i}$-fine on ait :

$$\left|\mathcal{S}(f,\mathcal{Q}_i) - \mathcal{HK}\int_{G_i} f(x)dx\right| < \frac{\eta}{m}$$

On peut supposer que $\delta_{\eta,i}(x) < \delta_\epsilon(x) \quad \forall x \in G_i$.
Soit $\mathcal{R} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{Q}_1 \cup ... \cup \mathcal{Q}_m$, où $\mathcal{P}_0 = \{(F_j, y_j), j = 1, ...n\}$, il existe une subdivision pointée de $[a,b]$. On a clairement $\mathcal{R}$ δ_ϵ-fine. On a donc :

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\left|\mathcal{S}(f,\mathcal{P}_0) - \mathcal{HK}\int_{\cup F_j} f(x)\mathrm{d}x\right|}_{A} \\
&= \left|\left(\mathcal{S}(f,\mathcal{R}) - \sum_{i=1}^{m}\mathcal{S}(f,\mathcal{Q}_i)\right) - \left(\mathcal{HK}\int_a^b f(x)dx - \mathcal{HK}\int_{\cup G_i} f(x)\mathrm{d}x\right)\right| \\
&= \left|\left(\mathcal{S}(f,\mathcal{R}) - \sum_{i=1}^{m}\mathcal{S}(f,\mathcal{Q}_i)\right) - \left(\mathcal{HK}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{m}\mathcal{HK}\int_{G_i} f(x)\mathrm{d}x\right)\right| \\
&\leqslant \left|\left(\mathcal{S}(f,\mathcal{R}) - \mathcal{HK}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\right| + \sum_{i=1}^{m}\left|\mathcal{S}(f,(\mathcal{Q}_i)) - \mathcal{HK}\int_{G_i} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \epsilon + m\frac{\eta}{m} \\
&= \epsilon + \eta
\end{aligned}$$

Or ceci est vrai $\forall \eta > 0$ et donc $A \leqslant \epsilon$.
Pour la seconde inégalité du lemme, on note $I^+ \subset [\![1,n]\!]$ tel que $\forall i \in I^+$, on ait $f(y_i)l(F_i) - \mathcal{HK}\int_{F_i} f(x)dx \geqslant 0$. On note de même $I^- \subset [\![1,n]\!]$ les indices où les termes précédents sont strictement négatifs. En appliquant la première inégalité du lemme, on a :

$$\sum_{i\in I^+}\left|f(y_i)l(F_i) - \mathcal{HK}\int_{F_i} f(x)dx\right| = \sum_{i\in I^+} f(y_i)l(F_i) - \mathcal{HK}\int_{F_i} f(x)dx \leqslant \epsilon$$

et

$$\sum_{i\in I^-}\left|f(y_i)l(F_i) - \mathcal{HK}\int_{F_i} f(x)dx\right| = -\left(\sum_{i\in I^-} f(y_i)l(F_i) - \mathcal{HK}\int_{F_i} f(x)dx\right) \leqslant \epsilon$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}&\left|f(y_j)l(F_j)-\mathcal{HK}\int_{F_j}f(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\sum_{i\in I^+}\left|f(y_i)l(F_i)-\mathcal{HK}\int_{F_i}f(x)\mathrm{d}x\right|+\sum_{i\in I^-}\left|f(y_i)l(F_i)-\mathcal{HK}\int_{F_i}f(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant 2\epsilon\end{aligned}$$

□

Théorème A.0.3. ***Théorème de recouvrement de Vitali*** *Soient $E\subseteq[a,b]$ et $\mathcal{F}$ un recouvrement de Vitali de E. Etant donné $\epsilon>0$, il existe $I_1,...,I_p$ des intervalles disjoints de $\mathcal{F}$ et une famille dénombrable d'intervalles fermés $\{J_i:\ i\geqslant p+1\}$ de $\mathbb{R}$ avec :*

$$E-\bigcup_{i=1}^{p}I_i\subseteq\bigcup_{i=p+1}^{\infty}J_i\ \textbf{\textit{et}}\ \sum_{i=p+1}^{\infty}l(J_i)\leqslant\epsilon$$

De plus, il vient que :

$$E\subseteq\bigcup_{i=1}^{p}I_i\cup\bigcup_{i=p+1}^{\infty}J_i$$

Démonstration. On prend I_1 arbitraire et on suppose les r premiers intervalles disjoints choisis.

- Si $E\subseteq\bigcup_{i=1}^{r}I_i$, on prend $J_i=\emptyset\ \forall i\geqslant r+1$ et la preuve est finie.

- Sinon on considère $\mathcal{F}_r$ la sous famille de $\mathcal{F}$ des intervalles qui contiennent les points de E et qui sont disjoints des intervalles $I_1,...,I_r$.
Soit $\lambda_r=\sup\{l(I),\ I\in\mathcal{F}_r\}$ ($<\infty$ car majoré par $b-a+2$). On choisit $I_{r+1}\in\mathcal{F}_r$ tel que $l(I_{r+1})>\frac{1}{2}\lambda_r$. On réitére le procédé avec $I_{r+n}\in\mathcal{F}_{r+n-1}$ tel que $l(I_{r+n})>\frac{1}{2}\lambda_{r+n-1}$.

Si $\exists N\in\mathbb{N}$ tel que $E\subseteq\bigcup_{i=1}^{N}I_i$, c'est terminé.

- Sinon on a construit une suite infinie d'intervalles fermés $(I_i)_i$. Puisque les I_i sont disjoints et sont inclus dans $[a-1, b+1]$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) \leqslant b-a+2$.

Soit $\epsilon < 0$, $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=p+1}^{\infty} l(I_i) \leqslant \frac{\epsilon}{5}$.

Posons $D_p := E - \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} I_i$ et soit $x \in D_p$. Comme $\mathcal{F}$ est un recouvrement de Vitali de E, $\exists I_x \in \mathcal{F}$ tel que $x \in I_x$ et $I_x \cap I = \emptyset$ pour $i \leqslant p$ (car la longueur de I_x peut être choisie aussi petite que l'on veut). D'où $I_x \in \mathcal{F}_p$.
Montrons que nécessairement $\exists n \in \mathbb{N}$, $n > p$ tel que $I_x \cap I_n \neq \emptyset$. En effet, si $I_x \cap I_i = \emptyset$ pour $i = 1, \ldots, n$ alors $I_x \in \mathcal{F}_n$ et $0 < l(I_x) \leqslant \lambda_n$. Or $\lambda_n < 2\,\underbrace{l(I_{n+1})}_{\substack{\longrightarrow 0\\ n\to\infty}}$, donc $\lim\limits_{\infty} \lambda_n = 0$. On ne peut donc pas avoir $0 < l(I_x) \leqslant \lambda_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Soit n_x le plus petit entier n tel que $I_x \cap I_n \neq \emptyset$, donc $n_x > p$. Puisque $I_x \in \mathcal{F}_{n_x - 1}$, on a $l(I_x) \leqslant \lambda_{n_x-1} < 2l(I_{n_x})$.
Soit x_{n_x} le milieu de I_{n_x}. Puisque $I_x \cap I_{n_x} \neq \emptyset$, on a :

$$d(x, x_{n_x}) \leqslant l(I_x) + \frac{1}{2} l(I_{n_x}) < \frac{5}{2} l(I_{n_x})$$

Soit $J_{n_x} = \overline{B}(x_{n_x}, 5l(I_{n_x}))$. Pour $i \geqslant p+1$, on construit J_i de même. Puisque x est quelconque, on a bien :

$$E - \bigcup_{i=1}^{p} I_i = D_p \subseteq \bigcup_{i=p+1}^{\infty} J_i$$

De plus, $l(J_i) = 5l(I_i)$ pour $i > p$ donc :

$$\sum_{i=p+1}^{\infty} l(J_i) \leqslant 5 \underbrace{\sum_{i=p+1}^{\infty} l(I_i)}_{\leqslant \frac{\epsilon}{5}} \leqslant \epsilon$$

$\square$

Annexe B

Intégrales de Riemann et de Lebesgue

Théorème B.0.4. ***(Théorème fondamental pour Riemann)***
Soient $f,\ F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *telles que* $\forall x \in [a,b]\,,\ F'(x) = f(x)$. *Si* f *est* $\mathcal{R}$*-intégrable sur* $[a,b]$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on dira que f est mesurable si et seulement si elle est mesurable en tant que fonction de $([a,b], \mathcal{L} \cap [a,b])$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ où $\mathcal{L} \cap [a,b]$ est la tribu de Lebesgue de l'intervalle $[a,b]$.

On définit :
$\mathcal{M}([a,b], \mathcal{L} \cap [a,b]) = \left\{ f : ([a,b], \mathcal{L} \cap [a,b]) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})\right),\ f \text{ mesurable} \right\}$
$\mathcal{M}^+([a,b], \mathcal{L} \cap [a,b]) = \{ f \in \mathcal{M}([a,b], \mathcal{L} \cap [a,b]),\ f \geqslant 0 \}$.

Théorème B.0.5. ***(Convergence monotone pour Lebesgue)***
Soit $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{M}^+([a,b], \mathcal{L} \cap [a,b])$ *telle que* $\forall x \in [a,b],\ f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
Alors $f \in \mathcal{M}^+([a,b], \mathcal{L} \cap [a,b])$ *et* $\displaystyle\int_a^b f \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n \mathrm{d}\lambda$.

Lemme B.0.2. ***(de Fatou pour Lebesgue)*** *Soit* $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{M}^+([a,b], \mathcal{L} \cap [a,b])$.
Alors $\displaystyle\int_a^b \liminf (f_n)\, \mathrm{d}\lambda \leqslant \liminf \left(\int_a^b f_n \mathrm{d}\lambda \right)$.

Théorème B.0.6. ***(Convergence dominée pour Lebesgue)*** *Soient* $(f_n)_{n\geqslant 1}$, $f \in \mathcal{M}([a,b], \mathcal{L}\cap[a,b])$ *tels que :*
(i) $f_n(x) \to f(x)$ λ*-pp*
(ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leqslant g$ λ*-pp*

Alors $f_n,\ f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b |f_n - f|\,\mathrm{d}\lambda = 0$.
En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f_n \mathrm{d}\lambda = \int_a^b f \mathrm{d}\lambda$.

Proposition B.0.1. *Soit* $f : ([a,b], \mathcal{L}\cap[a,b]) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})\right)$ *une fonction mesurable. Alors il existe une suite* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *de fonctions mesurables étagées telle que* $\forall x \in [a,b],\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
De plus, si $f \geqslant 0$*, la suite* (f_n) *peut être construite croissante.*
Si f *est bornée (dans* $\mathbb{R}$*), la suite* (f_n) *peut être construite telle que* $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ *uniformément dans* $\mathbb{R}$.

Proposition B.0.2. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction nulle presque partout sur* $[a,b]$*. Alors* f *est mesurable d'intégrale nulle.*

Proposition B.0.3. *Soit* E *un ensemble mesurable. Il existe une suite décroissante* $(O_n)_n$ *d'ouverts contenant* E *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda(O_n) = \lambda(E)$.

Démonstration. Soit E un ensemble Lebesgue-mesurable. On peut écrire $E = B \cup N$ où B est un borélien de $\mathbb{R}$ et N un ensemble λ-négligeable. On sait que $\lambda(E) = \lambda(B)$ et, B étant un borélien, que

$$\lambda(B) = \inf\{\lambda(O),\ O \text{ ouvert de } \mathbb{R} \text{ tel que } B \subset O\}$$

Par définition de l'inf, il existe une suite $(U_n)_n$ telle que $\forall n \geqslant 1,\ B \subset U_n$ et $\lambda(U_n) \leqslant \lambda(B) + \dfrac{1}{n}$.

Posons alors $\forall k \geqslant 1,\ B_k = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} U_i$. Ainsi $(B_n)_n$ est une suite décroissante

d'ouverts (car intersection finie d'ouverts), telle que chaque B_n contient B, de sorte que $\lambda(B) \leqslant \lambda(B_n) \leqslant \lambda(B)+\frac{1}{n}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda\left(B_n\right) = \lambda\left(B\right) = \lambda\left(E\right)$.
Puisque N est un ensemble λ-négligeable, il existe un ensemble borélien M de mesure nulle contenant N. On construit alors de la même façon une suite décroissante $\left(M_n\right)_n$ d'ouverts telle que $\forall i \in \mathbb{N},\ M \subset M_i$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda\left(M_n\right) = \lambda\left(M\right) = 0$.
En posant $O_n = B_n \cup M_n$ on obtient une suite décroissante $\left(O_n\right)_n$ d'ouverts telle que chaque O_n contient E avec $\lambda(E) \leqslant \lambda\left(O_n\right) \leqslant \lambda\left(B_n\right) + \lambda\left(M_n\right)$. En passant à la limite on trouve $\lambda(E) \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda\left(O_n\right) \leqslant \lambda(E)$, d'où l'égalité. □

Proposition B.0.4. *Tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut être écrit comme réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts.*

Démonstration. Soit E un ouvert de $\mathbb{R}$. L'ensemble des composantes connexes est une partition de E. Or les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, donc E s'écrit comme union disjointe d'intervalles de $\mathbb{R}$.
Soit $x \in E$. Puisque E est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $]x-r, x+r[\subset E$. Mais $]x-r, x+r[$ est un connexe contenant x et est donc inclus dans la composante connexe de x. Ainsi, les composantes connexes sont ouvertes.
Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel dans chacune des composantes connexes car celles-ci contiennent un intervalle non réduit à un point. $\mathbb{Q}$ étant dénombrable, le nombre de composantes connexes l'est aussi.

□

Bibliographie

[1] Franck E. Burk, *A garden of Integral*, Mathematical Association of America, 2007

[2] Eric Charpentier, *Les théories de l'intégration de Cauchy à Henstock*, Université de mathématiques, Institut de Bordeaux I

[3] Jean-Pierre Demailly, *Théorie élémentaire de l'intégration : l'intégrale de Henstock-Kurzweil*, Université Joseph Fourier Grenoble I, Mars 2009

[4] Gérard Lavau, *Intégration*, 2008

[5] J.-Y. Briend, *Intégration I*, Graduate Studies in Mathematics, volume 32, Université Aix-Marseille I, 2004

[6] Robert G. Bartle, *A modern theory of integration*, University of Illinois, Urbana Chanpaign Eastern Michigan university, Ypsilanti, 2000

[7] Eric Charpentier, *L'intégrale de Riemann complète*, Université de Bordeaux I

[8] Roger Cuculière, *Quelle intégrale pour l'an 2000 ?*, Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie, Avril 1998

[9] Jean Mawhin, *L'éternel retour des sommes de Riemann-Stieltjes dans l'évolution du calcul intégral*, Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol.70, 4-5-6, pp. 345-364, 2001

[10] Douglas S. Kurtz, Charles W. Swartz, *Theories of Integration*, The integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil and Mcshane - Series of Real Analysis, Volume 9, 2004

[11] Xavier Gourdon, *Les maths en tête*, Analyse 2ème édition, 2008

[12] Bertrand Hauchecorne - *Les contre-exemple en mathématiques*, 2ème édition, 2007

Adeline Laville, Clément Coine, Isabelle Guichard
Sous la direction de M. Alexandre Nou

L'intégrale de Henstock-Kurzweil se base sur l'introduction de jauges qui s'adaptent aux comportements locaux de la fonction étudiée. Cette modification a priori anodine de l'intégrale de Riemann est à l'origine d'une nouvelle théorie qui permet entre autres l'intégration de toute fonction dérivable. En outre, elle englobe l'intégrale de Lebesgue et de Riemann généralisée avec une approche plus simple, sans recours à la théorie de la mesure. Certaines universités comme Aix-Marseille privilégient l'enseignement de l'intégrale de Henstock-Kurzweil à celle de Riemann en deuxième année. Elle permet d'introduire plus simplement l'intégrale de Lebesgue car elle a un aspect géométrique qui la rend plus abordable et des théorèmes de convergence similaires.
Notre étude s'est limitée au cas des intervalles bornés mais il est possible de l'étendre aux intervalles infinis, pour lesquels on retrouve la majeure partie des résultats.

Mots clés : intégrale, subdivision pointée, jauge, théorème fondamental, théorèmes de convergence, complétude, théorème de Hake.

UFR Sciences et Techniques de Besançon.