UFR Sciences et Techniques de Besançon
Faculté de mathématiques
Unité Projet

Sous la direction de Monsieur Gilles Lancien

Calcul fonctionnel dans les algèbres de Banach et Hypercyclicité

Clément Coine
Adeline Laville

Besançon, 2011 / 2012

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous étudions la théorie spectrale dans les algèbres de Banach avant d'y définir un calcul fonctionnel analytique qui respecte les propriétés algébriques et spectrales. Enfin, nous nous intéressons à la théorie récente des opérateurs hypercycliques.

Dans un premier temps, nous définirons les algèbres de Banach et la notion de spectre qui généralise celle de valeur propre pour les opérateurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Nous démontrerons alors la formule du rayon spectral qui met en lien les propriétés algébriques et topologiques d'une algèbre. Nous étudierons ensuite les opérateurs compacts pour lesquels nous avons une description simple du spectre avant de terminer par quelques exemples détaillés dont les isométries.

Dans une seconde partie, nous verrons la construction du calcul fonctionnel analytique associé à un élément x d'une algèbre de Banach. Pour un tel élément et pour un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, il est naturel de définir $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. En reprenant la formule de Cauchy vue en analyse complexe, nous donnerons un sens à $f(x)$ pour une fonction f holomorphe dans un voisinage K du spectre de x. Pour cela nous commencerons par démontrer l'existence d'un chemin entourant K pour lequel la valeur de l'indice est connue puis nous définirons l'intégrale des fonctions à valeurs dans une algèbre de Banach. Nous retrouverons alors plusieurs propriétés dont certaines déjà connues dans le cadre des polynômes. Une application de ces résultats sera donnée par le théorème de décomposition de Riesz qui nous sera utile dans la troisième partie.

Notre dernière partie débutera par une introduction aux espaces vectoriels topologiques (evt). Cela nous permettra l'étude des opérateurs hypercycliques, c'est-à-dire des opérateurs T définis sur un evt séparable X pour lesquels il existe des éléments $x \in X$ d'orbite $\{T^n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ dense. Nous verrons notamment plusieurs critères d'hypercyclicité, l'un d'eux nous fournissant une condition suffisante simple que nous utiliserons à travers deux exemples. Enfin, nous donnerons un résultat de connexité sur le spectre d'un opérateur hypercyclique.

Chapitre 1

Théorie élémentaire des algèbres de Banach

1.1 Définitions et premières propriétés

Dans cette section, nous commençons par donner la définition d'une algèbre de Banach. C'est dans ce cadre que nous nous plaçons pour les deux premiers chapitres.

Définition 1.1.1. - *Une algèbre $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni d'une multiplication associative et distributive, c'est-à-dire :*

$$\forall\ x, y, z \in \mathcal{A},\ \ x(yz) = (xy)z, (x+y)z = xz + yz, x(y+z) = xy + xz$$

et tel que :

$$\forall x, y \in \mathcal{A},\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ \lambda(xy) = x(\lambda y) = (\lambda x)y$$

- On dit qu'une algèbre $\mathcal{A}$ est normée si on peut la munir d'une norme $\|.\|$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathcal{A},\ \ \|xy\| \leqslant \|x\|\|y\| \tag{1.1}$$

- Si de plus $(\mathcal{A}, \|.\|)$ est complet on dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach.

Par la suite on supposera que $\mathcal{A}$ est munie d'une unité e pour la multiplication c'est-à-dire telle que $\forall x \in \mathcal{A},\ \ xe = ex = x$ et vérifiant de plus $\|e\| = 1$.

Un élément $x \in \mathcal{A}$ est dit inversible si $\exists y \in \mathcal{A}$ tel que $xy = yx = e$. On note alors $y = x^{-1}$ et $G(\mathcal{A})$ désignera l'ensemble des éléments inversibles.

Pour une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ on définit :

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}. \tag{1.2}$$

D'après les propriétés de $\mathcal{A}$, l'application p est bilinéaire et l'inégalité (1.1) entraîne que $\|p(x, y)\| \leqslant \|x\|\|y\|$, ce qui montre que p est continue.

Donnons d'abord deux exemples classiques d'algèbres de Banach :

Exemple : Soit K un compact. On considère $\mathcal{C}(K)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni du produit usuel de fonctions, d'unité $\mathbf{1} : x \in K \longmapsto 1$ et de la norme $\|.\|_\infty$ qui en font une algèbre de Banach.

Exemple : Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des opérateurs continus de E dans E. Alors $(\mathcal{B}(E), +, ., \circ, \|.\|)$ est une algèbre de Banach d'unité I (application identité) où l'on a posé

$$\begin{array}{rccl} + : & \mathcal{B}(E) \times \mathcal{B}(E) & \longrightarrow & \mathcal{B}(E) \\ & (T, S) & \longmapsto & (x \in E \mapsto T(x) + S(x)) \end{array}$$
$$\begin{array}{rccl} . : & \mathbb{C} \times \mathcal{B}(E) & \longrightarrow & \mathcal{B}(E) \\ & (\lambda, S) & \longmapsto & (x \in E \mapsto \lambda T(x)) \end{array}$$
$$\begin{array}{rccl} \circ : & \mathcal{B}(E) \times \mathcal{B}(E) & \longrightarrow & \mathcal{B}(E) \\ & (T, S) & \longmapsto & (x \in E \mapsto T\left[S(x)\right]) \end{array}$$

et pour $T \in \mathcal{B}(E)$, $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_E$.

Les deux théorèmes suivants interviennent dans de nombreuses preuves. Nous retrouvons notamment l'expression d'un inverse à l'aide d'une série entière.

Théorème 1.1.1. *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $x \in \mathcal{A}$.*
Si $\|x\| < 1$ alors $e + x \in G(\mathcal{A})$ et $(e + x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$.

Démonstration. L'inégalité $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$ $\forall x, y \in \mathcal{A}$ entraîne en particulier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x^n\| \leq \|x\|^n$. Mais alors $\|(-1)^n x^n\| \leq \|x\|^n$ ce qui montre que la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ est absolument convergente (car $\|x\| < 1$) et donc

convergente par complétude de $\mathcal{A}$.
On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k$ et $S = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$. On a clairement

$$(e+x)S_n = e + (-1)^n x^{n+1} = S_n(e+x) \tag{1.3}$$

Par continuité du produit (1.2) on a $(e+x)S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (e+x)S$ et $S_n(e+x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(e+x)$. Puisque $e+(-1)^n x^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$ on obtient par l'égalité (1.3) que $(e+x)S = e = S(e+x)$ ce qui est le résultat souhaité. $\square$

Théorème 1.1.2. *$G(\mathcal{A})$ est ouvert et $x \longmapsto x^{-1}$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $G(\mathcal{A})$ dans $G(\mathcal{A})$.*

Démonstration. - Soit $x \in G(\mathcal{A})$. Montrons que $B_{\|\cdot\|}\left(x, \frac{1}{\|x^{-1}\|}\right) \subset G(\mathcal{A})$.
Soit $y \in \mathcal{A}$ tel que $\|y-x\| < \dfrac{1}{\|x^{-1}\|}$.
On a $\|x^{-1}y - e\| = \|x^{-1}(y-x)\| \leq \|x^{-1}\|\|y-x\| < 1$, d'où, par le théorème (1.1.1), $(x^{-1}y-e)+e = x^{-1}y \in G(\mathcal{A})$. Ainsi, $y = x(x^{-1}y) \in G(\mathcal{A})$ avec $y^{-1} = (x^{-1}y)^{-1}x^{-1}$, ce qui montre que $G(\mathcal{A})$ est ouvert.

- L'application $\phi : \begin{array}{ccc} G(\mathcal{A}) & \longrightarrow & G(\mathcal{A}) \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$ est bijective égale à son inverse donc pour montrer le résultat il suffit de prouver que ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Soit $x \in G(\mathcal{A})$ fixé et $h \in \mathcal{A}$ tel que $\|h\| < \dfrac{1}{2\|x^{-1}\|}$ de sorte que $x+h \in G(\mathcal{A})$ et $\|hx^{-1}\| < \dfrac{1}{2}$. On a :

$$\begin{aligned}\phi(x+h) = (x+h)^{-1} = ((e+hx^{-1})x)^{-1} &= x^{-1}(e+hx^{-1})^{-1} \\ &= x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-hx^{-1})^n \\ &= x^{-1} - x^{-1}hx^{-1} + x^{-1}\sum_{n=2}^{\infty}(-hx^{-1})^n\end{aligned}$$

D'où $\phi(x+h)-\phi(x) = L(h)+x^{-1}\sum_{n=2}^{\infty}(-hx^{-1})^n$ avec $L : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ h & \longmapsto & -x^{-1}hx^{-1} \end{array}$.

- Montrons que $\mathrm{d}_x\phi = L$.

L est linéaire et continue car $\|L(h)\| \leq \|x^{-1}\|^2\|h\|$.
De plus,

$$\frac{\|x^{-1}\sum_{n=2}^{\infty}(-hx^{-1})^n\|}{\|h\|} \leq \frac{\|x^{-1}\|\sum_{n=2}^{\infty}\|hx^{-1}\|^n}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2\|x^{-1}\|^3}{\|h\|}\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\|hx^{-1}\|^k}_{<\frac{1}{2^k}}$$
$$\leq 2\|h\|\|x^{-1}\|^3 \underset{\|h\|\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\phi(x+h) - \phi(x) - L(h) = o(\|h\|)$, ce qui montre bien que ϕ est différentiable en x de différentielle L.

- Montrons par récurrence que ϕ est de classe $\mathcal{C}^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Le résultat est vrai pour $n = 0$ car ϕ est différentiable donc continue.
Supposons ϕ de classe $\mathcal{C}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Considérons l'application $\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathcal{A}\times\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{A},\mathcal{A}) \\ & (x,y) & \longmapsto & (h \mapsto -xhy) \end{array}$.

Ψ est clairement bilinéaire et elle est continue car $\|\Psi(x,y)h\| \leq \|x\|\|y\|\|h\|$ donc $\|\Psi(x,y)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A},\mathcal{A})} \leq \|x\|\|y\|$. Ψ est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Par ailleurs, $\mathrm{d}_x\phi(h) = -x^{-1}hx^{-1} = \Psi(\phi(x),\phi(x))(h)$ ou encore $\mathrm{d}_x\phi = \mathrm{d}\phi(x) = \Psi(\phi(x),\phi(x))$. Par hypothèse de récurrence ϕ est de classe $\mathcal{C}^n$ donc $\mathrm{d}\phi$ aussi, c'est-à-dire que ϕ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, ce qui achève la récurrence. □

1.2 Formule du rayon spectral

Définition 1.2.1. *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $x \in \mathcal{A}$.*
On définit le spectre de x, noté $\sigma(x)$, par $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid x - \lambda e$ n'est pas inversible$\}$.
On appelle ensemble résolvant, noté $\rho(x)$, le complémentaire de $\sigma(x)$ dans $\mathbb{K}$.
On appelle valeur propre de x tout élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x - \lambda e$ n'est pas injectif, et on note $vp(x)$ l'ensemble des valeurs propres de x.

Exemple : Soit K un compact. On considère l'algèbre de Banach $\mathcal{C}(K)$.
Soit $f \in \mathcal{C}(K)$. Alors $\sigma(f) = \mathrm{Im}\ f$.

En effet,

$$\begin{aligned}\lambda \notin \sigma(f) \Leftrightarrow f - \lambda \mathbf{1} \text{ inversible} \Leftrightarrow \forall x \in K, (f - \lambda\mathbf{1})(x) \neq 0 \ &\Leftrightarrow \forall x \in K, f(x) \neq \lambda \\ &\Leftrightarrow \lambda \notin \mathrm{Im} f.\end{aligned}$$

Proposition 1.2.1. *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $x \in \mathcal{A}$. On définit l'application* $R(.,x) : \begin{array}{ccc} \rho(x) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \lambda & \longmapsto & (\lambda e - x)^{-1}. \end{array}$
Alors $R(.,x)$ vérifie l'équation résolvante :

$$\begin{aligned}\forall \lambda, \mu \in \rho(x),\ R(\lambda, x) - R(\mu, x) &= (\mu - \lambda) R(\lambda, x) R(\mu, x) \\ &= (\mu - \lambda) R(\mu, x) R(\lambda, x)\end{aligned}$$

Démonstration. On remarque que pour $a, b \in G(\mathcal{A})$,

$$a^{-1} - b^{-1} = a^{-1}(b - a) b^{-1}.$$

D'où

$$\begin{aligned}R(\lambda, x) - R(\mu, x) &= (\lambda e - x)^{-1} - (\mu e - x)^{-1} \\ &= (\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x - (\lambda e - x))(\mu e - x)^{-1} \\ &= R(\lambda, x)(\mu - \lambda) R(\mu, x) \\ &= (\mu - \lambda) R(\lambda, x) R(\mu, x)\end{aligned}$$

On obtient la deuxième égalité en remarquant que pour $a, b \in G(\mathcal{A})$,
$a^{-1} - b^{-1} = b^{-1}(b - a) a^{-1}$. □

Pour un espace de Banach E de dimension finie, nous savons que chaque élément de l'algèbre $\mathcal{B}(E)$ a un spectre fini (qui correspond à l'ensemble des valeurs propres). Dans une algèbre de Banach quelconque, cette propriété n'est pas conservée mais nous avons tout de même que le spectre d'un élément est compact.

Théorème 1.2.1. *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $x \in \mathcal{A}$.*
Alors $\sigma(x)$ est compact.

Démonstration. L'application $\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & \lambda & \longmapsto & x - \lambda e \end{array}$ est continue car
$\|\varphi(\lambda) - \varphi(\alpha)\| = \|(x - \lambda e) - (x - \alpha e)\| = |\lambda - \alpha|$.
Mais alors $\sigma(x) = \varphi^{-1}(\mathcal{A} \setminus G(\mathcal{A}))$ est fermé comme image réciproque du fermé $\mathcal{A} \setminus G(\mathcal{A})$ par φ continue.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| > \|x\|$. Alors $x - \lambda e = (-\lambda)\left(\dfrac{x}{-\lambda} + e\right) \in G(\mathcal{A})$ car $\left\|\dfrac{x}{-\lambda}\right\| < 1$. D'où $\lambda \notin \sigma(x)$ et $\sigma(x)$ est borné par $\|x\|$.

Ainsi $\sigma(x)$ est fermé et borné donc compact.

□

Pour un élément $T \in \mathcal{B}(E)$ avec E de dimension finie sur $\mathbb{C}$, nous savons que le spectre de T est non vide car son polynôme caractéristique a nécessairement une racine complexe. Nous allons voir, grâce aux deux théorèmes suivants, que c'est encore le cas dans une algèbre de Banach quelconque (et ce par des outils similaires à ceux permettant de démontrer que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos).

Théorème 1.2.2. *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach sur $\mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{A}^*$ et $x \in \mathcal{A}$. On considère* $\begin{array}{rccl} f_\varphi : & \rho(x) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \varphi[(x - ze)^{-1}] \end{array}$.
Alors $f_\varphi \in \mathcal{H}(\rho(x))$ et $\lim\limits_{|z| \to +\infty} f_\varphi(z) = 0$.

Démonstration. Soient $z \in \rho(x)$ et $h \in \mathbb{C}$ tels que $z + h \in \rho(x)$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{(x - (z+h)e)^{-1} - (x - ze)^{-1}}{h} &= \frac{(he)(x - ze - he)^{-1}(x - ze)^{-1}}{h} \quad \text{par (1.2.1)} \\ &= (x - ze - he)^{-1}(x - ze)^{-1} \\ &\underset{|h| \to 0}{\longrightarrow} (x - ze)^{-2} \end{aligned}$$

par continuité de $y \longmapsto y^{-1}$ et du produit (1.2).

En appliquant φ à la limite précédente, on obtient par continuité et par linéarité que $\dfrac{f_\varphi(z+h) - f_\varphi(z)}{h} \underset{|h| \to 0}{\longrightarrow} \varphi((x - ze)^{-2})$, ce qui montre que $f_\varphi \in \mathcal{H}(\rho(x))$.

De plus, l'égalité $(x-ze)^{-1} = \left(z\left(\frac{1}{z}x-e\right)\right)^{-1} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}x-e\right)^{-1}$ nous donne que $(x-ze)^{-1} \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0_{\mathcal{A}}$.
Ainsi, φ étant continue, $f_\varphi(z) = \varphi((x-ze)^{-1}) \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(0_{\mathcal{A}}) = 0$. □

Théorème 1.2.3. *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach sur $\mathbb{C}$ et $x \in \mathcal{A}$. Alors $\sigma(x)$ est non vide.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\sigma(x) = \varnothing$ ie $\rho(x) = \mathbb{C}$.
Par le théorème (1.2.2), $\forall \varphi \in \mathcal{A}^*,\ f_\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et tend vers 0 quand $|z| \to +\infty$.
Par le théorème de Liouville, $f_\varphi = 0\ \forall \varphi \in \mathcal{A}^*$.
Mais alors

$$\forall z \in \mathbb{C},\ (x-ze)^{-1} = 0. \tag{1.4}$$

En effet, s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(x-z_0e)^{-1} \neq 0$ alors par un corollaire du théorème de Hahn-Banach, il existe $\phi \in \mathcal{A}^*$ tel que $\|\phi\| = 1$ et $\underbrace{\phi\left((x-z_0e)^{-1}\right)}_{f_\phi(z_0)} = \|(x-z_0e)^{-1}\| \neq 0$, ce qui est impossible.

Or l'égalité (1.4) est impossible puisque 0 n'est pas inversible.
Donc $\rho(x) \neq \mathbb{C}$ et ainsi $\sigma(x) \neq \varnothing$. □

Définition 1.2.2. *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $x \in \mathcal{A}$.
Le rayon spectral de x, noté $r(x)$, est défini par $r(x) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \sigma(x)\}$.
C'est le rayon du plus petit disque fermé centré en l'origine contenant $\sigma(x)$.*

Remarque 1.2.1. *- $\sigma(x)$ étant compact, le maximum de $\{|\lambda|,\ \lambda \in \sigma(x)\}$ est bien atteint et fini.*
- On a $r(x) \leqslant \|x\|$ car par le théorème (1.1.1), $(x-\lambda e) = \lambda\left(\frac{x}{\lambda}-e\right)$ est inversible pour $\left\|\frac{x}{\lambda}\right\| < 1$ ie pour $|\lambda| > \|x\|$.

Théorème 1.2.4 (Formule du rayon spectral)**.** *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach sur $\mathbb{C}$ et $x \in \mathcal{A}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x^n\|^{1/n}$ existe et vaut $r(x)$.*

Pour démontrer la formule du rayon spectral nous avons besoin du résultat suivant :

Lemme 1.2.1. *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach sur $\mathbb{C}$ et $x \in \mathcal{A}$.*
Soit $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \psi_n : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi\left(\dfrac{x^n}{\lambda^n}\right). \end{array}$

Alors $\psi_n \in (\mathcal{A}^*)^*$ *et* $\|\psi_n\| = \left\|\dfrac{x^n}{\lambda^n}\right\|$.

Démonstration. $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \varphi \in \mathcal{A}^*, \ \psi_n$ est clairement linéaire et vérifie $\|\psi_n(\varphi)\| = \left\|\varphi\left(\dfrac{x^n}{\lambda^n}\right)\right\| \leqslant \|\varphi\| \left\|\dfrac{x^n}{\lambda^n}\right\|$ d'où $\psi_n \in (\mathcal{A}^*)^*$ avec $\|\psi_n\| \leqslant \left\|\dfrac{x^n}{\lambda^n}\right\|$.
Par un corollaire du théorème de Hahn-Banach, il existe $\varphi \in \mathcal{A}^*$ tel que $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi\left(\dfrac{x^n}{\lambda^n}\right) = \left\|\dfrac{x^n}{\lambda^n}\right\|$. On a donc bien $\|\psi_n\| = \left\|\dfrac{x^n}{\lambda^n}\right\|$. □

Nous pouvons à présent démontrer la formule du rayon spectral.

Démonstration. - Par l'égalité

$$(x^n - \lambda^n e) = (x - \lambda e)(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \ldots + \lambda^{n-1} e),$$

on a que si $(x^n - \lambda^n e)$ est inversible alors

$$e = (x - \lambda e)(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \ldots + \lambda^{n-1} e)(x^n - \lambda^n e)^{-1}$$

et donc $(x - \lambda e)$ est inversible.
Ainsi si $\lambda \in \sigma(x)$ alors $\forall n \geqslant 1, \ \lambda^n \in \sigma(x^n)$.

Par la remarque (1.2.1), $|\lambda^n| \leqslant \|x^n\|$ et donc $|\lambda| \leqslant \|x^n\|^{1/n}$.
D'où l'inégalité $r(x) \leqslant \liminf\limits_{n \to +\infty} \|x^n\|^{1/n}$.

- Si $|\lambda| > \|x\|$, on a $\left(\dfrac{x}{\lambda} - e\right)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} -\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^n$ par le théorème (1.1.1),

et donc $(x - \lambda e)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} -\dfrac{x^n}{\lambda^{n+1}}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{A}^*$ et f_φ définie comme au théorème (1.2.2). On a alors $f_\varphi(\lambda) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\varphi(x^n)}{\lambda^{n+1}}$

par continuité de φ, et ce pour tout λ tel que $|\lambda| > \|x\|$.

En posant $u = \dfrac{1}{\lambda}$ et $g(u) = f_\varphi\left(\dfrac{1}{u}\right)$, on a $g(u) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(x^n)u^{n+1}$ pour tout u tel que $|u| < \dfrac{1}{\|x\|}$.

Par le théorème (1.2.2), $f_\varphi \in \mathcal{H}(\rho(x))$ et puisque $\left\{\lambda \mid \dfrac{1}{|\lambda|} < \dfrac{1}{r(x)}\right\} = \{\lambda \mid |\lambda| > r(x)\} \subset \rho(x)$, le développement en série entière de g converge pour tout u tel que $|u| < \dfrac{1}{r(x)}$ c'est-à-dire que le développement en série de f_φ converge pour tout λ tel que $|\lambda| > r(x)$.

En particulier,

$$\forall \varphi \in \mathcal{A}^*, \ \sup_n \left|\varphi\left(\frac{x^n}{\lambda^n}\right)\right| < +\infty \ \ \forall\, |\lambda| > r(x). \tag{1.5}$$

Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{rccl} \psi_n : & \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi\left(\dfrac{x^n}{\lambda^n}\right). \end{array}$

Alors, par le lemme (1.2.1), $\psi_n \in (\mathcal{A}^*)^*$ et $\|\psi_n\| = \left\|\dfrac{x^n}{\lambda^n}\right\|$.

L'inégalité (1.5) nous dit alors que $\forall \varphi \in \mathcal{A}^*, \ \sup_n |\psi_n(\varphi)| < +\infty$.

$\mathcal{A}^*$ étant un espace de Banach, on peut appliquer le théorème de Banach-Steinhaus pour obtenir $\sup_n \|\psi_n\| < +\infty$ ie $\sup_n \left\|\dfrac{x^n}{\lambda^n}\right\| := M(\lambda) < +\infty$.

D'où, $\forall\, |\lambda| > r(x)$, $\|x^n\| \leqslant M(\lambda)\,|\lambda|^n$ et donc $\|x^n\|^{1/n} \leqslant |\lambda|\,(M(\lambda))^{1/n}$.
Ainsi $\limsup_{n\to+\infty} \|x^n\|^{1/n} \leqslant r(x)$. D'où le résultat. □

Cette formule est remarquable : elle affirme l'égalité entre deux quantités qui n'ont a priori pas de lien, l'une étant purement algébrique et la seconde topologique. En effet, la notion de spectre correspond à celle d'inversibilité d'éléments de l'algèbre tandis que celle de norme dépend évidemment des propriétés métriques de l'algèbre.

Proposition 1.2.2 (de l'image spectrale)**.** *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach sur $\mathbb{C}$ et $x \in \mathcal{A}$.*
Alors pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(\sigma(x)) = \sigma(P(x))$.

Démonstration. - Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. λ est racine de $P - P(\lambda)$ donc il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P - P(\lambda) = (X - \lambda)Q = Q(X - \lambda)$.
D'où $P(x) - P(\lambda)e = (x - \lambda e)Q(x) = Q(x)(x - \lambda e)$.
Si $P(\lambda) \notin \sigma(P(x))$ alors

$$e = (x - \lambda e)Q(x)\left(P(x) - P(\lambda)e\right)^{-1} = \left(P(x) - P(\lambda)e\right)^{-1} Q(x)(x - \lambda e)$$

et donc $\lambda \notin \sigma(x)$.
D'où l'inclusion $P(\sigma(x)) \subseteq \sigma(P(x))$.

- Réciproquement, soient $P \in \mathbb{C}[X]$, $n = deg(P) \geqslant 1$ et $\lambda \in \sigma(P(x))$.
On décompose $P - \lambda$ en produit de facteurs irréductibles :

$$P - \lambda = k(X - \lambda_1)\ldots(X - \lambda_n).$$

On a $P(x) - \lambda e = k(x - \lambda_1 e)\ldots(x - \lambda_n e)$ et $P(x) - \lambda e$ n'étant pas inversible, nécessairement l'un de ces facteurs $(x - \lambda_i e)$ ne l'est pas. Mais alors $\lambda_i \in \sigma(x)$ et puisque $P(\lambda_i) = \lambda$, on a $\lambda \in P(\sigma(x))$.
D'où l'autre inclusion puis l'égalité. □

1.3 Opérateurs compacts

1.3.1 Généralités

Soient E et F deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$.

Définition 1.3.1. *On appelle opérateur compact de E dans F tout élément T de $\mathcal{B}(E, F)$ pour lequel l'image de la boule unité fermée de E, notée $\bar{B}(E)$, est relativement compacte dans F.*
On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F,
et $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Remarque 1.3.1. *En fait,* $T \in \mathcal{B}(E,F)$ *est compact si et seulement si l'image par* T *de toute partie bornée de* E *est relativement compacte dans* F. *L'implication* $(\Leftarrow)$ *est claire.*
Réciproquement, si A *est une partie bornée de* E*, il existe* $r > 0$ *tel que* $A \subset B(0,r)$. *Alors* $T(A) \subset r\overline{T(\bar{B}(E))}$ *qui est compact comme image du compact* $\overline{T(\bar{B}(E))}$ *par l'application continue* $\begin{array}{ccc} F & \to & F \\ y & \mapsto & ry \end{array}$.

Exemple : Tout opérateur de rang fini est compact.
En effet, T étant continu, $\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|T(x)\|$ est fini, c'est-à-dire que l'image par T de $\bar{B}(E)$ est une partie bornée de $Im(T)$ qui est de dimension finie, donc relativement compacte dans $Im(T)$. D'où $T(\bar{B}(E))$ est relativement compacte dans F.

Proposition 1.3.1. $\mathcal{K}(E,F)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{B}(E,F)$.

Démonstration. - $0_{\mathcal{B}(E,F)} \in \mathcal{K}(E,F)$.
- Soient S, $T \in \mathcal{K}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors $(\lambda S+T)(\bar{B}(E)) \subset \lambda\overline{S(\bar{B}(E))}+\overline{T(\bar{B}(E))}$ qui est compact comme image du compact $\overline{S(\bar{B}(E))} \times \overline{T(\bar{B}(E))}$ par l'application continue
$\begin{array}{ccc} F \times F & \to & F \\ (x,y) & \mapsto & \lambda x + y \end{array}$. □

La proposition qui suit permet de montrer plus facilement qu'un opérateur est compact.

Proposition 1.3.2. *Si* F *est complet et si* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(E,F)$ *converge vers* $T \in \mathcal{B}(E,F)$ *alors* T *est compact.*
En particulier toute limite dans $\mathcal{B}(E,F)$ *d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact.*

Démonstration. D'après le théorème (B.0.4) il suffit de montrer que $T(\bar{B}(E))$ est précompact.
Soit $\epsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|T - T_n\| \leqslant \dfrac{\epsilon}{3}$.
$T_n(\bar{B}(E))$ étant relativement compact, donc précompact, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules $B\left(T_n x_j, \dfrac{\epsilon}{3}\right)$ avec $x_j \in \bar{B}(E)$, $j = 1, \dots \ell$.
Soit $x \in \bar{B}(E)$. Il existe $j \leqslant \ell$ tel que $T_n(x) \in B\left(T_n x_j, \dfrac{\epsilon}{3}\right)$

ie $\|T_n x - T_n x_j\| < \dfrac{\epsilon}{3}$.

On a alors, par inégalité triangulaire,

$$\|Tx - Tx_j\| \leqslant \|Tx - T_n x\| + \|T_n x - T_n x_j\| + \|T_n x_j - Tx_j\| < \epsilon.$$

D'où $T(\bar{B}(E)) \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\ell} B(Tx_j, \epsilon)$ et $T(\bar{B}(E))$ est précompact. $\square$

1.3.2 Propriétés spectrales

On se place ici sur un espace vectoriel normé E quelconque. $\mathcal{B}(E)$ n'est pas nécessairement une algèbre de Banach mais nous considérerons néanmoins les notions relatives au spectre vues dans les parties précédentes.

Proposition 1.3.3. *Soit* $T \in \mathcal{K}(E)$. *Alors :*
i) Le sous-espace $\ker(I - T)$ *est de dimension finie*
ii) Le sous-espace $Im(I - T)$ *est fermé*
iii) L'opérateur $I - T$ *est inversible dans* $\mathcal{B}(E)$ *si et seulement si il est injectif.*

Démonstration. i) Soit $F = \ker(I - T)$. L'opérateur $(I - T)$ est continu donc F est fermé.
De plus,

$$\begin{aligned} x \in \bar{B}(F) &\Leftrightarrow \|x\| \leqslant 1 \text{ et } x \in \ker(I - T) \\ &\Leftrightarrow \|x\| \leqslant 1 \text{ et } x = Tx \\ &\Leftrightarrow x \in T(\bar{B}(F)). \end{aligned}$$

D'où $\bar{B}(F) = T(\bar{B}(F)) \subset \overline{T(\bar{B}(E))} \cap F$ qui est fermé dans $\overline{T(\bar{B}(E))}$ compact et donc compact.
Mais alors, par le théorème de Riesz, F est de dimension finie.

ii) Soit $y \in \overline{Im(I - T)}$ et montrons que $y \in Im(I - T)$. Il existe une suite $(x_n)_n \subset E$ telle que $y = \lim\limits_{n \to +\infty} (x_n - T(x_n))$.

1^{er} cas : la suite $(x_n)_n$ est bornée. Alors $\exists r > 0$ tel que $(x_n)_n \subset B(0, r)$. D'où $(T(x_n))_n \subset T(B(0, r))$ qui est relativement compacte par la remarque

(1.3.1). On peut alors extraire de $(T(x_n))_n$ une sous-suite $(T(x_{\varphi(n)}))_n$ qui converge vers $z \in E$.
Alors $y = \lim\limits_{n\to+\infty}(x_{\varphi(n)} - T(x_{\varphi(n)}))$ ie $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = y + z$.

Par continuité de T on a

$$z = \lim_{n\to+\infty} T(x_{\varphi(n)}) = T\left(\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}\right) = T(y+z).$$

On obtient donc $y = y + z - T(y+z) \in Im(I-T)$.

2^{eme} cas : la suite $(x_n)_n$ n'est pas bornée.
Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = d(x_n, \ker(I-T))$. Par i), $\ker(I-T)$ est de dimension finie donc, par le lemme (B.0.7), il existe $(z_n)_n \subset \ker(I-T)$ telle que $\|x_n - z_n\| = d_n$.

$*$ Si la suite $(d_n)_n$ est bornée, ie $(x_n - z_n)_n$ est bornée alors, en remarquant que $x_n - T(x_n) = (x_n - z_n) - T(x_n - z_n)$ (car $z_n \in \ker(I-T)$), on obtient $y = \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - z_n) - T(x_n - z_n)$ et on applique alors le 1^{er} cas à la suite $(x_n - z_n)_n$ pour voir que $y \in Im(I-T)$.

$*$ Si la suite $(d_n)_n$ n'est pas bornée alors, quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que $d_n \to +\infty$. La suite $\left(\dfrac{x_n - z_n}{d_n}\right)_n$ étant bornée et T compact, on peut, quitte à en extraire une sous-suite, supposer que $\left(T\left(\dfrac{x_n - z_n}{d_n}\right)\right)_n$ converge vers $u \in E$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - z_n}{d_n} &= \lim_{n\to+\infty}\left[T\left(\frac{x_n - z_n}{d_n}\right) + (I-T)\left(\frac{x_n - z_n}{d_n}\right)\right] \\
&= u + \lim_{n\to+\infty} \frac{(I-T)(x_n)}{d_n} \qquad \text{car } z_n \in \ker(I-T) \\
&= u + \lim_{n\to+\infty} \frac{y_n}{d_n} \\
&= u.
\end{aligned}$$

Par continuité de T on a

$$u = \lim_{n\to+\infty} T\left(\frac{x_n - z_n}{d_n}\right) = T\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - z_n}{d_n}\right) = T(u)$$

donc $u \in \ker(I-T)$.

De plus, pour n assez grand, $\left\| \dfrac{x_n - z_n}{d_n} - u \right\| < 1$ ie $\|x_n - z_n - d_n u\| < d_n$, ce qui contredit la définition de d_n car $z_n + d_n u \in \ker(I-T)$.

Donc $(d_n)_n$ est bornée et $y \in Im(I-T)$. D'où le résultat.

iii) Supposons que $I-T$ est injectif et montrons alors qu'il est surjectif.
Supposons par l'absurde que $E_1 = Im(I-T) \neq E$.
Soit alors $E_0 = E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = Im(I-T)^n$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, E_n est fermé et $E_{n+1} \subsetneq E_n$.
$*$ La propriété est vraie pour $n = 0$ par hypothèse.
$*$ Supposons la propriété vraie au rang n et montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$.
On remarque que $T(E_n) \subset E_n$. En effet, si $y \in E_n$ alors $(I-T)y \in E_{n+1} \subset E_n$ donc $Ty \in y + E_n = E_n$.
Donc T induit un opérateur $T_n \in \mathcal{B}(E_n)$.
De plus, $T_n(\bar{B}(E_n)) \subset \overline{T(\bar{B}(E))} \cap E_n$ qui est compact car T est compact et E_n est fermé. Donc $T_n \in \mathcal{K}(E_n)$.
En notant I_n l'idendité de E_n on a $E_{n+1} = (I_n - T_n)(E_n)$ et donc par ii), E_{n+1} est fermé dans E_n et donc dans E.
D'autre part, $E_{n+2} = (I-T)^{n+1}\underbrace{(I-T)(E)}_{\subset E} \subset E_{n+1}$.

Enfin, $I-T$ étant injectif par hypothèse, on a

$$E_n \neq E_{n+1} \Rightarrow E_{n+1} = (I-T)(E_n) \neq (I-T)E_{n+1} = E_{n+2}.$$

On a donc montré que E_{n+1} était un sous-espace fermé strict de E_n.

En appliquant le lemme (B.0.8) à $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ on en déduit qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in E_n,\ \|u_n\| = 1$ et $d(u_n, E_{n+1}) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Alors, pour $n < m$,

$$Tu_n - Tu_m = u_n - v_{n,m} \quad \text{avec} \quad v_{n,m} = Tu_m + (I-T)u_n \in E_{n+1}.$$

Tous les points de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $\bar{B}(E)$ et puisque $(T(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite écartée, on ne peut en extraire une sous-suite de Cauchy. Ceci contredit la relative compacité de $T(\bar{B}(E))$. On a donc démontré la surjectivité de $I - T$.

Il reste à démontrer que $(I-T)^{-1}$ est continue. Il suffit pour cela de montrer la continuité en 0. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas.
Alors il existe $\epsilon > 0$ et une suite $(x_n)_n \subset E$ tels que $(x_n)_n$ tend vers 0 et $\|(I-T)^{-1}(x_n)\| \geqslant \epsilon$.
En posant $y_n = (I-T)^{-1}(x_n)$, on obtient une suite $(y_n)_n$ vérifiant $\|y_n\| \geqslant \epsilon$ et $((I-T)(y_n))_n = (x_n)_n$ tend vers 0.
On normalise $(x_n)_n$ en considérant $u_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$.
T étant compact, il existe une sous-suite $(Tu_{\varphi(n)})_n$ de $(Tu_n)_n$ qui converge vers $v \in E$. Puisque $(I-T)(u_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = v$.
En particulier $\|v\| = 1$ et, par continuité de T,

$$Tv = T\left(\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}\right) = \lim_{n\to+\infty} Tu_{\varphi(n)} = v$$

Ceci contredit l'injectivité de $I - T$. □

Proposition 1.3.4. *Soit $R \in \mathcal{K}(E,F)$. Si E_1 et F_1 sont deux espaces normés, $T \in \mathcal{B}(E_1, E)$ et $S \in \mathcal{B}(F, F_1)$ alors $SRT \in \mathcal{K}(E_1, F_1)$.*

Démonstration. Soit $x \in \bar{B}(E_1)$, on a $\|T(x)\| \leqslant \|T\|\,\|x\| \leqslant \|T\|$.
Donc $SRT(\bar{B}(E_1)) \subset SR(\bar{B}(0, \|T\|)) = \|T\|\, SR(\bar{B}(E)) \subset \|T\|\, S\left(\overline{R(\bar{B}(E))}\right)$
qui est compact comme image de $\overline{R(\bar{B}(E))}$ compact par $\|T\|\, S$ continu. □

Voici à présent le théorème principal qui montre que le spectre de tout opérateur compact est dénombrable et dont on peut ordonner les éléments.

Théorème 1.3.1. *Soit $T \in \mathcal{K}(E)$.*
1) Si E est de dimension infinie alors $0 \in \sigma(T)$.
2) Toute valeur spectrale non nulle de T est valeur propre de T et son sous-espace propre associé est de dimension finie.
3) Le spectre de T est dénombrable. S'il est infini, on peut ranger ses éléments non nuls en une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\lambda_{n+1}| \leqslant |\lambda_n|$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$.

Démonstration. 1) Supposons que 0 n'est pas une valeur spectrale de T. Alors T est inversible et $I = TT^{-1}$ est compact par la proposition (1.3.4). Alors $\bar{B}(E)$ est compact donc, par le théorème de Riesz, E est de dimension finie.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Alors $\lambda \in v_p(T) \Leftrightarrow I - \dfrac{T}{\lambda}$ n'est pas injectif, et $\ker(\lambda I - T) = \ker\left(I - \dfrac{T}{\lambda}\right)$.
Par ailleurs $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow I - \dfrac{T}{\lambda}$ n'est pas inversible dans $\mathcal{B}(E)$.
On applique alors la proposition (1.3.3) à l'opérateur compact $\dfrac{T}{\lambda}$.

3) Si E est de dimension finie, le résultat est évident.
Si E est de dimension infinie, il suffit de prouver que pour tout $\epsilon > 0$ il y a au plus un nombre fini de valeurs spectrales λ de T tel que $|\lambda| \geqslant \epsilon$.
En effet, si c'est le cas, on a $\sigma(T) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{\lambda \in \sigma(T),\ |\lambda| \geqslant \frac{1}{n}\right\} \cup \{0\}$ qui est dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis.
De plus, si $\sigma(T)$ est infini, on écrit

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \sigma(T),\ |\lambda| \geqslant 1\} \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \underbrace{\left\{\lambda \in \sigma(T),\ \frac{1}{n+1} \leqslant |\lambda| < \frac{1}{n}\right\}}_{:=A_n} \right) \cup \{0\}$$

de sorte que l'on peut ranger les éléments des A_n puisqu'ils sont en nombre fini, et que pour $m > n$, si $\lambda_1 \in A_n$ et $\lambda_2 \in A_m$ alors $|\lambda_2| < |\lambda_1|$.
On a alors bien $\sigma(T) = \{\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ avec $|\lambda_{n+1}| \leqslant |\lambda_n|$ et pour $\alpha > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de $\lambda_i \in \sigma(T)$ tel que $|\lambda_i| \geqslant \alpha$, donc $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant m \Rightarrow |\lambda_n| < \alpha$. D'où $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Supposons alors par l'absurde qu'il existe $\epsilon > 0$ et une suite $(\lambda_n)_n$ de valeurs spectrales de T deux à deux distinctes tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\lambda_n| \geqslant \epsilon$.
D'après le point 2) les λ_n sont des valeurs propres de T. Il existe alors une suite $(e_n)_n$ d'élèments de E de norme 1 telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Te_n = \lambda_n e_n$.
La famille $(e_n)_n$ est libre. En effet, soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{K}^{k+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \alpha_i e_i = 0$. En appliquant T il vient $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \alpha_i e_i = 0$. On répète cette opéra-

tion k fois pour obtenir le système

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \alpha_i e_i = 0 \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \lambda_i^k \alpha_i e_i = 0 \end{cases}$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_0^k & \lambda_1^k & \cdots & \lambda_k^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 e_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_k e_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue est une matrice de Vandermonde inversible (car les λ_i sont deux à deux distincts) donc on en déduit que $\forall i \in [\![0, k]\!]$, $\alpha_i e_i = 0$. Puisque les e_i sont de norme 1, ils sont non nuls donc $\alpha_i = 0\ \forall i \in [\![0, k]\!]$.
Posons $E_n =< e_0, \dots, e_n >$. La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'espaces de dimensions finies donc fermés. D'après le lemme (B.0.8) il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de norme 1 telle que
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in E_{n+1}$ et $d(u_n, E_n) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Posons alors $v_n = \dfrac{u_n}{\lambda_{n+1}}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $\dfrac{1}{\epsilon}$ et pour $n > m$,

$$Tv_n - Tv_m = u_n - v_{n,m} \quad \text{avec} \quad v_{n,m} = Tv_m + \frac{1}{\lambda_{n+1}}(\lambda_{n+1} I - T)u_n.$$

Or $Tv_m \in E_{m+1} \subset E_n$ et $(\lambda_{n+1} I - T)(E_{n+1}) \subset E_n$ (car $(\lambda_{n+1} I - T)(e_{n+1}) = 0$ et $E_{n+1} = E_n \oplus \mathbb{K} e_{n+1}$).
Donc $v_{n,m} \in E_n$ et ainsi $\|Tv_n - Tv_m\| = \|u_n - v_{n,m}\| \geqslant d(u_n, E_n) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
On a alors une suite $(v_n)_n$ bornée dont l'image par T est une suite écartée. On ne peut en extraire une sous-suite de Cauchy, ce qui contredit la compacité de T. $\square$

Exemple : L'opérateur $\begin{array}{rccl} T: & \ell_2(\mathbb{N}^*) & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{N}^*) \\ & (x_n)_{n=1}^{+\infty} & \longmapsto & \left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n=1}^{+\infty} \end{array}$ est compact.

En effet, l'opérateur $\begin{array}{rccl} R_N: & \ell_2(\mathbb{N}^*) & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{N}^*) \\ & (x_n)_{n=1}^{+\infty} & \longmapsto & \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{N}x_N, 0, \dots\right)_{n=1}^{+\infty} \end{array}$

est de rang fini et vérifie $\forall x = (x_n)_n \in \ell_2(\mathbb{N}^*)$,

$$\begin{aligned} \|(T - R_N)(x)\|_2 &= \left\|\left(0, \dots, 0, \frac{1}{N+1}x_{N+1}, \frac{1}{N+2}x_{N+2}, \dots\right)\right\|_2 \\ &= \frac{1}{N+1}\left\|\left(0, \dots, 0, x_{N+1}, \frac{N+1}{N+2}x_{N+2}, \dots\right)\right\|_2 \\ &= \frac{1}{N+1}\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left(\frac{N+1}{n}\right)^2 x_n^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{1}{N+1}\|x\|_2 . \end{aligned}$$

D'où $\|T - R_N\| \leqslant \frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par la propositon (1.3.2), T est compact.

Dans cet exemple il est facile de voir que $vp(T) = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ et que la "base" canonique constitue une base de vecteurs propres.

1.4 Exemples

Dans cette fin de chapitre, nous détaillons divers exemples de spectres et donnons une description du spectre des isométries.

Exemple 1 : Soient $C = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| = 1\}$ et $D = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| < 1\}$.

Soit $\begin{array}{rccl} L: & \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & x = (x_n)_{n=0}^{+\infty} & \longmapsto & (x_1, x_2, \dots). \end{array}$

- Montrons que $vp(L) = D$:
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $0 \neq (x_n)_{n=0}^{+\infty} \in \ker(\lambda I - L) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \lambda x_n = x_{n+1}$.

D'où $x_n = \lambda^n x_0$ et ainsi $(x_n)_n \in l_2(\mathbb{N}) \Leftrightarrow |\lambda| < 1$.

- Montrons que $\sigma(L) = \bar{D}$:
On a déjà $vp(L) \subset \sigma(L)$ donc $D \subset \sigma(L)$. Ainsi $\bar{D} \subset \overline{\sigma(L)} = \sigma(L)$ puisque $\sigma(L)$ est fermé.
Or on a $r(L) \leqslant \|L\|_{\ell_2} = 1$ donc $\sigma(L) \subset \bar{D}$ et par suite $\sigma(L) = \bar{D}$.

Proposition 1.4.1. *Soient E un espace de Banach et T une isométrie de E. Alors $\sigma(T) = \bar{D}$ ou $\sigma(T) \subset C$ et le second cas a lieu si et seulement si T est surjectif.*

Démonstration. - On a $v_p(T) \subset C$ car si $x \neq 0 \in \ker(\lambda I - T)$ alors $Tx = \lambda x$. Donc $\|Tx\| = |\lambda| \|x\|$, ce qui implique que $|\lambda| = 1$ car $\|Tx\| = \|x\| \neq 0$.
On a $\sigma(T) \subset \bar{D}$ car $r(T) \leqslant \|T\| = 1$.

- Montrons que $\rho(T)$ est fermé dans D.
Soit $(\lambda_n) \in D \cap \rho(T)$ tel que $\lambda_n \to \lambda \in D$. Soit $x \in E$ et $y = (\lambda_n I - T)^{-1}x$.
Alors $x = \lambda_n y - Ty$ donc $\|x\| \geqslant |\|\lambda_n y\| - \|Ty\|| = (1 - |\lambda_n|) \|y\|$.
Donc $(\lambda_n I - T)^{-1}$ est continue de norme $\leqslant \dfrac{1}{1 - |\lambda_n|}$.
Puisque $(\lambda_n)_n$ converge vers $\lambda \in D$, la suite $\left(\dfrac{1}{1 - |\lambda_n|}\right)_n$ est bornée donc $(R(\lambda_n, T))_n$ est bornée dans $\mathcal{B}(E)$. Soit M un majorant.
Par l'équation résolvante (1.2.1) on a

$$\forall p, q \in \mathbb{N},\ \|R(\lambda_p, T) - R(\lambda_q, T)\| \leqslant |\lambda_p - \lambda_q| M^2.$$

La suite $(\lambda_n)_n$ est de Cauchy donc $(R(\lambda_n, T))_n$ également et elle converge vers $R \in \mathcal{B}(E)$ car $\mathcal{B}(E)$ est complet.
On a $\forall n \in \mathbb{N},\ R(\lambda_n, T)(\lambda_n I - T) = (\lambda_n I - T)R(\lambda_n, T) = I$ donc par continuité du produit dans $\mathcal{B}(E)$, $R(\lambda I - T) = (\lambda I - T)R = I$. Donc $R = R(\lambda, T)$ et $\lambda \in \rho(T)$.

- $D \cap \rho(T)$ est fermé dans D d'après ce qui précède, ouvert dans D car $\rho(T)$ est ouvert ($\sigma(T)$ fermé) et D ouvert.
D étant connexe, $D \cap \rho(T) = \varnothing$ ou D.

Si $D\cap\rho(T) = D$ alors $0 \in \rho(T)$ donc T est surjectif. De plus, $\sigma(T) \subset \bar{D}\setminus D = C$. Réciproquement, si T est surjectif alors $0 \in \rho(T)$ donc $D\cap\rho(T) \neq \varnothing$ donc $D \cap \rho(T) = D$.
Si $D \cap \rho(T) = \varnothing$ alors $D \subset \sigma(T) \subset \bar{D}$ donc $\sigma(T) = \bar{D}$ (car $\sigma(T)$ est fermé).
D'où le résultat. $\square$

Exemple 2 : Soit $R : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ x = (x_n)_{n=0}^{+\infty} & \longmapsto & (0, x_0, x_1, \ldots). \end{array}$

R est une isométrie non surjective de $l_2(\mathbb{N})$ donc d'après ce qui précède $\sigma(R) = \bar{D}$.
Cependant $vp(R) = \varnothing$. En effet, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x = (x_n)_{n=0}^{+\infty} \in \ker(\lambda I - R)$.
On a :

$$\begin{aligned} (\lambda I - R)x = 0 &\Leftrightarrow \lambda(x_0, x_1, x_2, \ldots) - (0, x_0, x_1, \ldots) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x_0 = 0 \\ x_{n-1} = \lambda x_n \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 0 \end{aligned}$$

Donc $\lambda I - R$ est injectif pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exemple 3 : Soient K un espace métrique compact et $f \in \mathcal{C}(K)$.
On considère $T : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(K) & \longrightarrow & \mathcal{C}(K) \\ g & \longmapsto & fg \end{array}$. T est un opérateur de norme $\|f\|_\infty$.

- *Montrons que* $\sigma(T) = f(K)$ *:*
Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus f(K)$. Alors $(f - \lambda\mathbf{1})(x) \neq 0\ \forall x \in K$ et $\dfrac{1}{f - \lambda\mathbf{1}} \in \mathcal{C}(K)$.
On voit alors facilement que $S : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(K) & \longrightarrow & \mathcal{C}(K) \\ g & \longmapsto & \dfrac{g}{f - \lambda\mathbf{1}} \end{array}$ est la réciproque de $T - \lambda I$. Donc $\lambda \notin \sigma(T)$.

Soit $\lambda \in f(K)$. Il existe $x_0 \in K$ tel que $\lambda = f(x_0)$.
Alors $\forall g \in \mathcal{C}(K), (T - \lambda I)(g)(x_0) = (fg - \lambda g)(x_0) = (f(x_0) - \lambda)g(x_0) = 0$.
En particulier $\mathbf{1}_K \in \mathcal{C}(K)$ ne peut pas avoir d'antécédent par $T - \lambda I$ qui n'est donc pas surjectif. Donc $\lambda \in \sigma(T)$.

- *Montrons que* $vp(T) = \{\ \lambda \in K$ tel que $\overset{\circ}{\widehat{\{f = \lambda\}}} \neq \varnothing\ \}$:

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\widehat{\{f=\lambda\}}^{\circ} \neq \varnothing$. Alors il existe O ouvert non vide de K sur lequel $f=\lambda$. Soit $g=\operatorname{dist}(.,O^{\complement})$. On a $g \in \mathcal{C}(K)$ et $g \neq 0$.
On a $(T-\lambda I)(g)=(f-\lambda)g$ et puisque $f-\lambda=0$ sur O et $g=0$ sur $O^{\complement}$ on a $(T-\lambda I)(g)=0$, ce qui montre que $T-\lambda I$ n'est pas injectif donc $\lambda \in vp(T)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\widehat{\{f=\lambda\}}^{\circ} = \varnothing$. Soit $g \in \operatorname{Ker}(T-\lambda I)$ c'est-à-dire $(f-\lambda)g = 0$. g s'annule nécessairement sur $K \setminus \{f=\lambda\}$ qui est dense dans K (car $\overline{K \setminus \{f=\lambda\}} = K \setminus \widehat{\{f=\lambda\}}^{\circ} = K$ par hypothèse). g étant continue, elle s'annule alors sur K donc $g=0$. D'où l'injectivité de $T-\lambda I$, ce qui montre que $\lambda \notin vp(T)$.

Exemple 4 : Soient $p \in [1,\infty]$ et
$$S: \begin{array}{ccc} L^p([0,1]) & \longrightarrow & L^p([0,1]) \\ f & \longmapsto & \left(x \longmapsto x^2 \displaystyle\int_0^1 y^2 f(y)\mathrm{d}y\right) \end{array}$$

S est linéaire et $\forall f \in L^p([0,1])$, on a :
$$\begin{aligned}
\|S(f)\|_p^p = \int_0^1 \left| x^2 \int_0^1 y^2 f(y)\mathrm{d}y \right|^p \mathrm{d}x &\leqslant \left(\int_0^1 |y^2 f(y)|\mathrm{d}y\right)^p \\
&\left(\leqslant \int_0^1 |f(y)|\mathrm{d}y\right)^p \\
&\leqslant \|f\|_p^p \, \|\mathbf{1}\|_{1-\frac{1}{p}}^p \quad \text{par Hölder} \\
&\leqslant \|f\|_p^p
\end{aligned}$$
D'où S est continue et $\|S\| \leqslant 1$.

Soient $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $g \in L^p([0,1])$. Résolvons dans $L^p([0,1])$ l'équation $(S-\lambda I)f = g$. Supposons que f est solution de cette équation. Alors $\forall x \in [0,1]$ on a :
$$\begin{aligned}
S(f)(x) - \lambda f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 \int_0^1 y^2 f(y)\mathrm{d}y - \lambda f(x) = g(x) \quad (*) \\
&\Rightarrow x^4 \int_0^1 y^2 f(y)\mathrm{d}y - \lambda x^2 f(x) = x^2 g(x)
\end{aligned}$$
En posant $J = \int_0^1 y^2 f(y)\mathrm{d}y$ et en intégrant sur $[0,1]$ la dernière égalité on obtient
$$J \int_0^1 x^4 \mathrm{d}x - \lambda \int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 g(x)\mathrm{d}x$$

ou encore $J\left(\frac{1}{5}-\lambda\right)=\displaystyle\int_0^1 x^2 g(x)\mathrm{d}x$.

Ainsi, si $\lambda \neq \frac{1}{5}$, on trouve $J=\dfrac{\int_0^1 x^2 g(x)\mathrm{d}x}{\frac{1}{5}-\lambda}$. En remplaçant J par sa valeur dans $(*)$ on obtient alors que $f(x)=\dfrac{x^2 J-g(x)}{\lambda}=\dfrac{x^2\int_0^1 y^2 g(y)\mathrm{d}y}{\lambda(\frac{1}{5}-\lambda)}-\dfrac{g(x)}{\lambda}$.

Réciproquement, on vérifie que f ainsi définie est dans $L^p([0,1])$ et est bien solution de $(S-\lambda I)f=g$.

Ainsi, on a montré que si $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\left\{0,\frac{1}{5}\right\}$, l'équation $(S-\lambda I)f=g$ admet une unique solution dans $L^p([0,1])$, d'où $\mathbb{K}\setminus\left\{0,\frac{1}{5}\right\}\subset\rho(S)$.

Montrons que $\left\{0,\frac{1}{5}\right\}=vp(S)=\sigma(S)$.
Pour $\lambda=\frac{1}{5}$ on remarque que $f(x)=x^2$ vérifie $S(f)(x)=x^2\int_0^1 y^4\mathrm{d}y=\dfrac{1}{5}x^2$ d'où $f\in\mathrm{Ker}(S-\frac{1}{5}I)$ et donc $\frac{1}{5}\in vp(S)$.
Pour $\lambda=0$, la fonction $f(x)=\mathbf{1}_{\left[0,\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right[}-\mathbf{1}_{\left]\sqrt[3]{\frac{1}{2}},1\right]}$ vérifie :

$$\begin{aligned}
S(f)(x)=x^2\left(\int_0^{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} y^2\mathrm{d}y-\int_{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}^1 y^2\mathrm{d}y\right)&=\frac{x^2}{3}\left(\left[y^3\right]_0^{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}-\left[y^3\right]_{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}^1\right)\\
&=\frac{x^2}{3}\left(\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{2}\right)\right)\\
&=0
\end{aligned}$$

D'où $f\in\mathrm{Ker(S)}$ et donc $0\in vp(S)$.

Chapitre 2

Calcul fonctionnel

2.1 Approximation d'un compact de $\mathbb{C}$

Définition 2.1.1. *Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ des chemins du plan complexe.*
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on définit la forme linéaire $\begin{array}{rccc} \tilde{\gamma_i} : & \mathcal{C}(K_i) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_{\gamma_i} f(z)\mathrm{d}z \end{array}$
où $K_i = Im(\gamma_i)$.

On considère la forme linéaire $\tilde{\Gamma} = \tilde{\gamma_1} + \ldots + \tilde{\gamma_n}$ définie sur $\mathcal{C}(K_1 \cup \ldots \cup K_n)$. On définit alors de manière formelle la somme $\Gamma = \gamma_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \gamma_n$ de sorte que pour $f \in \mathcal{C}(K_1 \cup \ldots \cup K_n)$,

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \tilde{\Gamma}(f) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\mathrm{d}z.$$

On appelle chaîne l'objet Γ ainsi défini.
Si dans la construction précédente chacun des γ_i est fermé, Γ est appelé cycle.

Définition 2.1.2. *Soient Γ un cycle et $z \in \mathbb{C} \backslash Im(\Gamma)$ où $Im(\Gamma) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} Im(\gamma_i)$.*
On définit l'indice de z par rapport à Γ par :

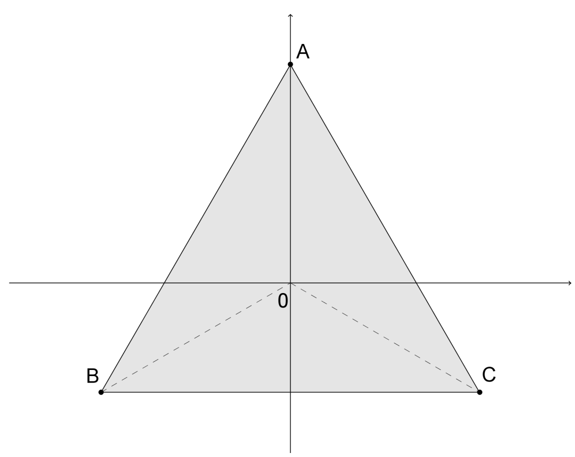
$$Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z} = \sum_{i=1}^{n} Ind_{\gamma_i}(z).$$

On rappelle que l'indice par rapport à un chemin fermé γ est un entier, qu'il est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$ et nul sur la composante connexe non bornée.

Définition 2.1.3. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Un chemin $\gamma : [a,b] \to \partial U$ est dit positivement orienté relativement à U si pour tout t tel que $\gamma'(t)$ existe et est non nul, il existe $\epsilon > 0$ tel que $]\gamma(t), \gamma(t) + i\epsilon\gamma'(t)[$ soit contenu dans U et $]\gamma(t), \gamma(t) - i\epsilon\gamma'(t)[$ ne rencontre pas $\bar{U}$ (le vecteur normal à γ en t pointe vers U de sorte que U est à gauche de γ).*
γ est négativement orienté si $\gamma^- : t \mapsto \gamma(a+b-t)$ est positivement orienté.

Lemme 2.1.1. *Soit T un triangle équilatéral fermé de $\mathbb{C}$ dont le bord est positivement orienté.*
Alors $Ind_{\partial T}(z) = \begin{cases} 0 \text{ si } z \in \mathring{T} \\ 1 \text{ si } z \notin T \end{cases}$.

Démonstration. Par homothétie, il suffit de considérer le cas du triangle T de sommets $A\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $B\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$, $C\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.



- Si $z \notin T$, $Ind_{\partial T}(z) = 0$ car z est dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \partial T$.
- Si $z \in \mathring{T}$, $Ind_{\partial T}(z) = Ind_{\partial T}(0)$ car 0 et z sont dans la même composante connexe. Soient $\theta_1 : \mathbb{C} \setminus e^{-i\frac{\pi}{2}}\mathbb{R}^+ \to \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$ et $\theta_2 : \mathbb{C} \setminus e^{i\frac{\pi}{2}}\mathbb{R}^+ \to \left]-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ deux déterminations continues de l'argument respectivement sur $\mathbb{C} \setminus e^{-i\frac{\pi}{2}}\mathbb{R}^+$

et sur $\mathbb{C} \setminus e^{i\frac{\pi}{2}}\mathbb{R}^+$. Soient Log_1 et Log_2 les déterminations continues du logarithme respectivement sur $\mathbb{C} \setminus e^{-i\frac{\pi}{2}}\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{C} \setminus e^{i\frac{\pi}{2}}\mathbb{R}^+$.
On a :

$$\begin{aligned}
2i\pi Ind_{\partial T}(0) &= \int_{\partial T} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} \\
&= \int_{[A,B]} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} + \int_{[B,C]} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} + \int_{[C,A]} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} \\
&= Log_1(z_B) - Log_1(z_A) + Log_2(z_C) - Log_2(z_B) + Log_1(z_A) - Log_1(z_C) \\
&= \ln|z_B| + i\theta_1(z_B) - \ln|z_B| - i\theta_2(z_B) + \ln|z_C| + i\theta_2(z_C) - \ln|z_C| - i\theta_1(z_C) \\
&= i(\theta_1(z_B) - \theta_2(z_B)) + i(\theta_2(z_C) - \theta_1(z_C)) \\
&= i\left(\frac{7\pi}{6} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) + i\left(-\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= 2i\pi
\end{aligned}$$

d'où $Ind_{\partial T}(z) = Ind_{\partial T}(0) = 1$. □

Lemme 2.1.2. *Soient K un compact non vide de $\mathbb{C}$ et U un voisinage ouvert de K. Alors il existe un voisinage L de K contenu dans U tel que L vérifie :*

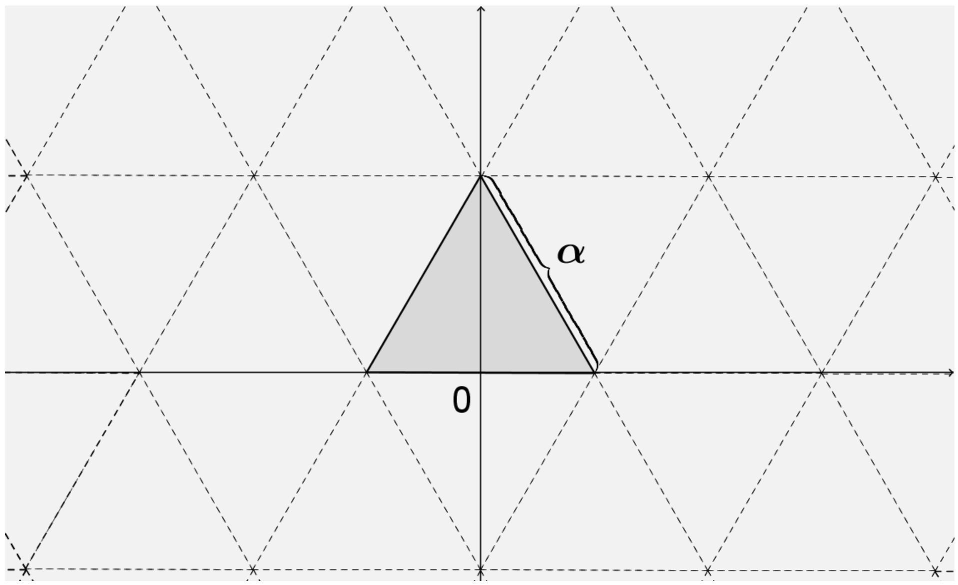
$$\text{Propriété } (\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \partial L \text{ est un cycle formé de chemins positivement orientés} \\ \text{et } Ind_{\partial L}(z) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } z \notin L \\ 1 \text{ si } z \in \mathring{L} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Démonstration. - Si $U = \mathbb{C}$, puisque K est borné il existe $r > 0$ tel que $K \subset B(0,r)$. Il suffit alors de considérer $L = \bar{B}(0,r)$.

- Maintenant si $U \neq \mathbb{C}$ on considère l'application $\begin{array}{rccl} \varphi : & K & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & k & \longmapsto & d(k, U^{\complement}) \end{array}$.

φ est continue et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ (car U est ouvert et $K \subset U$). K étant compact il existe $\alpha > 0$ tel que $\inf(\varphi) = 2\alpha$.

On découpe le plan en triangles équilatéraux fermés de côté α de la façon suivante :



K étant borné il n'existe qu'un nombre fini de triangles $T_1, \ldots, T_n$ qui rencontrent K. Soit L leur réunion. On a $diam(T_i) = \alpha$ et $T_i \cap K \neq \varnothing$ donc $T_i \subset U$ de sorte que $L \subset U$. De plus $K \subset \mathring{L}$ car si un point de K est sur le bord du triangle alors K rencontre 1 ou 5 autres triangles de L (selon que ce point est sur un sommet ou non) et donc ce point n'est pas sur le bord de L.

Montrons par récurrence sur le nombre de triangles que toute réunion L obtenue comme précédemment vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.

- Si n=1 on a le résultat par le lemme (2.1.1).

- Si L est obtenue à partir de la réunion de (n+1) triangles, on considère un triangle T dont au moins un côté est sur la frontière de L. Soit $\tilde{L}$ l'ensemble obtenu à partir de la réunion des n autres triangles. Par hypothèse de récurrence $\tilde{L}$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$. Son intersection avec T contient 0, 1 ou 2 côtés de T.

1^{er} cas : Si $\tilde{L}$ ne contient pas de côté de T, alors le bord orienté de L est la réunion des bords orientés de $\tilde{L}$ et de T.

De plus, pour $z \notin \partial L$,

$$\begin{aligned} Ind_{\partial L}(z) = Ind_{\partial \tilde{L}}(z) + Ind_{\partial T}(z) &= \begin{cases} 0+0 \text{ si } z \notin \tilde{L} \cup T \\ 0+1 \text{ si } z \in \mathring{T} \\ 1+0 \text{ si } z \in \mathring{\tilde{L}} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } z \notin \tilde{L} \cup T \\ 1 \text{ si } z \in \mathring{\tilde{L}} \cup \mathring{T} = \overset{\circ}{\widehat{\tilde{L} \cup T}} \end{cases} \end{aligned}$$

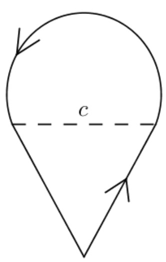


Figure 1
2$^{\text{ème}}$ cas : un seul côté

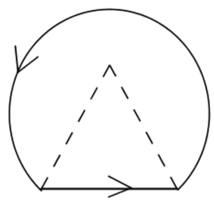


Figure 2
3$^{\text{ème}}$ cas : deux côtés sur le même chemin

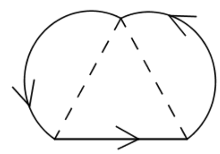


Figure 3
3$^{\text{ème}}$ cas : deux côtés sur deux chemins différents

2^{eme} cas : Si $\tilde{L}$ contient un seul côté c de T. Ce côté est sur un unique chemin fermé γ du bord de $\tilde{L}$. Soit alors β le chemin orienté décrivant le bord de T privé de c. On retire c de γ et on le remplace par β. On obtient alors un chemin fermé positivement orienté $\tilde{\gamma}$ (Figure 1).
De plus $\tilde{\gamma} = \gamma \dot{+} \beta \dot{-} c = \gamma \dot{+} \partial T$.

D'où, pour $z \notin \partial L$, $Ind_{\partial L}(z) = Ind_{\partial \tilde{L}}(z) + Ind_{\partial T}(z) = \begin{cases} 0 \text{ si } z \notin \tilde{L} \cup T \\ 0+1 \text{ si } z \in \mathring{T} \\ 1+0 \text{ si } z \in \mathring{\tilde{L}} \end{cases}$

Pour z un point de c distinct des deux sommets, z est dans l'adhérence de $\mathring{T}$ et donc, par continuité de l'indice (voir le lemme (A.0.5)), $Ind_{\partial L}(z) = 1$.

3^{eme} cas : Si $\tilde{L}$ contient deux côtés de T alors on distingue deux sous-cas :
- Si les deux côtés sont sur un même chemin γ du bord de $\tilde{L}$ on refait le même raisonnement que dans le deuxième cas en retirant les deux côtés communs (Figure 2).
- Si les deux côtés sont sur deux chemins distincts γ et β du bord de $\tilde{L}$, on recolle les chemins et le côté non commun en un seul chemin $\tilde{\gamma}$ puis on

retire les deux côtés communs (Figure 3). On a alors $\tilde{\gamma} = \gamma \dot{+} \beta \dot{+} \partial T$. Pour les mêmes raisons que dans le deuxième cas L vérifie la propriété $(\mathcal{P})$. $\square$

2.2 Définition du calcul fonctionnel

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach.

Soit $Esc([a,b],\mathcal{A})$ l'espace des fonctions en escalier sur $[a,b]$, de la forme $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{(a_i,a_{i+1})}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_i \in \mathcal{A}$, $a_i \in [a,b]$ et $a_i < a_{i+1}$.

Pour $f \in Esc([a,b],\mathcal{A})$ on pose $\phi(f) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(a_{i+1} - a_i)$.

Soit $\mathcal{B}([a,b],\mathcal{A})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathcal{A}$. On le munit de la norme $\|.\|_\infty$ où $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|_{\mathcal{A}}$.
$\mathcal{A}$ étant complet, $\mathcal{B}([a,b],\mathcal{A})$ est un espace de Banach.

On remarque que pour $f,\ g \in Esc([a,b],\mathcal{A})$ on a $\|\phi(f) - \phi(g)\|_{\mathcal{A}} \leqslant |b-a|\, \|f-g\|_\infty$, ce qui montre que ϕ est lipschitzienne donc uniformément continue sur $(Esc([a,b],\mathcal{A}), \|.\|_\infty)$. Ainsi, $\mathcal{A}$ étant un espace de Banach, ϕ se prolonge de manière unique à $\overline{Esc}^{\|.\|_\infty}([a,b],\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}([a,b],\mathcal{A})$.

En particulier, $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathcal{A}) \subset \overline{Esc}([a,b],\mathcal{A})$ (pour le voir on peut utiliser le théorème de Heine), donc pour une fonction $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathcal{A})$ on pose :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$$

où $(f_n)_n \subset Esc([a,b],\mathcal{A})$ avec $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (cette définition ne dépendant pas du choix de la suite $(f_n)_n$).

Pour $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathcal{A})$ et $T \in \mathcal{B}(\mathcal{A}, E)$, où E est un espace de Banach, on a

$$T\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b T(f(t))\mathrm{d}t.$$

En effet, cette égalité est vraie par linéarité pour les éléments de $Esc([a,b],\mathcal{A})$

et T étant continu et E complet, elle reste vraie par passage à la limite pour les éléments de $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathcal{A})$.
En particulier, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, l'application $\varphi_\alpha : x \in \mathcal{A} \mapsto \alpha x$ est dans $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ et on a alors pour tout $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathcal{A})$,

$$\alpha\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \alpha f(t)\mathrm{d}t$$

De même, si $x \in \mathcal{A}$, en considérant les applications $\varphi_g : y \in \mathcal{A} \mapsto xy$ et $\varphi_d : y \in \mathcal{A} \mapsto yx$ de $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, on a pour tout $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathcal{A})$,

$$x\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b xf(t)\mathrm{d}t$$

et

$$\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)x = \int_a^b f(t)x\mathrm{d}t.$$

On démontre de la même façon que si $f,g \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathcal{A})$,

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Pour une fonction holomorphe f et $x \in \mathcal{A}$ on souhaite définir $f(x) \in \mathcal{A}$. Nous nous rappelons de la formule de Cauchy vue en analyse complexe qui permet de définir $f(z)$ à partir de l'intégrale de $f(\xi)(\xi - z)^{-1}$. L'idée est alors de reprendre cette formule en intégrant $f(\xi)(\xi e - x)^{-1}$ le long d'un chemin bien choisi. Pour cela il est nécessaire que ce chemin ne rencontre pas le spectre de x. On considère alors l'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert contenant $\sigma(x)$, noté $\mathcal{H}(x)$.

Soit alors $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe sur un ouvert U contenant $\sigma(x)$. Il existe un cycle $\Gamma : [a,b] \to U \setminus \sigma(x)$ tel que $Ind_\Gamma(z) = \begin{cases} 1 \text{ si } z \in \sigma(x) \\ 0 \text{ si } z \notin U \end{cases}$.
On pose alors

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(z)(ze-x)^{-1}\mathrm{d}z = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b f(\Gamma(t))(\Gamma(t)-xe)^{-1}\Gamma'(t)\mathrm{d}t$$

ce qui est bien défini car $t \mapsto f(\Gamma(t))(\Gamma(t) - xe)^{-1}\Gamma'(t)$ est continue par morceaux.

Comme nous allons le voir, cette définition ne dépend pas du choix de l'ouvert U ni de celui du cycle Γ.

Définition 2.2.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $f : U \to \mathcal{A}$. On dit que f est holomorphe sur U, et on note $f \in \mathcal{H}(U)$, si :*

$$\forall z \in U, \lim_{|h| \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \in \mathcal{A}.$$

On note alors $f'(z)$ cette limite.

Théorème 2.2.1 (de Cauchy pour les algèbre de Banach)**.** *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathcal{A}$ une fonction holomorphe. Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ des chemins fermés dans U tels que*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus U, \sum_{k=1}^{m} Ind_{\gamma_k}(z) = 0.$$

Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z = 0.$

Démonstration. Cela revient à montrer : $\forall \varphi \in \mathcal{A}^*$, $\varphi\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z\right) = 0.$

On a $\varphi\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \varphi \circ f(z)\mathrm{d}z.$

Or $\varphi \circ f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe de dérivée $\varphi \circ f'$. En effet,
$\forall z \in U$, $\dfrac{\varphi \circ f(z+h) - \varphi \circ f(z)}{h} = \varphi\left(\dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}\right) \underset{|h| \to 0}{\longrightarrow} \varphi(f'(z))$ par continuité de φ.
Par le théorème de Cauchy version scalaire on a le résultat. □

Proposition 2.2.1. *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $x \in \mathcal{A}$. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert tel que $\sigma(x) \subset U$. Soient $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ et $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ deux familles de chemins fermés positivement orientés dans $U \setminus \sigma(x)$ telles que :*
$Ind_\Gamma(z) = Ind_\Lambda(z) = \begin{cases} 1 \ si \ z \in \sigma(x) \\ 0 \ si \ z \notin U \end{cases}$

Si $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe alors

$$\int_\Gamma f(z)(ze - x)^{-1} \mathrm{d}z = \int_\Lambda f(z)(ze - x)^{-1} \mathrm{d}z.$$

Démonstration. Considérons, pour $j = 1, \dots, n$, le chemin γ_{m+j} défini par $\gamma_{m+j}(t) = \lambda_j(1-t)$, $t \in [0,1]$. On considère $E = \{\gamma_k, \ k = 1, \dots, m+n\}$.
Soit l'ouvert $V = U \setminus \sigma(x)$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus V$ ie $z \in \sigma(x)$ ou $z \in \mathbb{C} \setminus U$.

Si $z \in \sigma(x)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+n} Ind_{\gamma_k}(z) = Ind_\Gamma(z) - Ind_\Lambda(z) = 1 - 1 = 0.$

Si $z \in \mathbb{C} \setminus U$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+n} Ind_{\gamma_k}(z) = Ind_\Gamma(z) - Ind_\Lambda(z) = 0 - 0 = 0.$

D'où $\forall z \in \mathbb{C} \setminus V$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+n} Ind_{\gamma_k}(z) = 0$ et ainsi par le théorème de Cauchy (2.2.1) appliqué à la fonction $z \mapsto f(z)(ze-x)^{-1} \in \mathcal{H}(V)$ on a :

$$0 = \int_E f(z)(ze - x)^{-1} \mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z)(ze - x)^{-1} \mathrm{d}z - \int_\Lambda f(z)(ze - x)^{-1} \mathrm{d}z.$$

D'où le résultat. □

Ainsi, pour $x \in \mathcal{A}$ et une fonction f holomorphe sur un ouvert U contenant $\sigma(x)$, la définition de $f(x)$ ne dépend pas du choix du cycle Γ.

Proposition 2.2.2. *Soient $x \in \mathcal{A}$ et f une fonction holomorphe sur deux ouverts U et V contenant $\sigma(x)$. Soit Γ_1 (respectivement Γ_2) un cycle formé de chemins positivement orientés dans $U \setminus \sigma(x)$ (respectivement $V \setminus \sigma(x)$) tel que :*
$Ind_{\Gamma_1}(z) = \begin{cases} 1 \ si \ z \in \sigma(x) \\ 0 \ si \ z \notin U \end{cases} \left(respectivement \ Ind_{\Gamma_2}(z) = \begin{cases} 1 \ si \ z \in \sigma(x) \\ 0 \ si \ z \notin V \end{cases} \right).$

Alors $\displaystyle\int_{\Gamma_1} f(z)(ze - x)^{-1} \mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f(z)(ze - x)^{-1} \mathrm{d}z.$

Démonstration. Considérons l'ouvert $W = U \cup V$. On a $\sigma(x) \subset W$ et $\Gamma_1,\ \Gamma_2$ sont dans $W \setminus \sigma(x)$ et vérifient :

$\forall z \in \sigma(x),\ Ind_{\Gamma_1}(z) = Ind_{\Gamma_2}(z) = 1$

et $\forall z \notin W,\ \begin{cases} Ind_{\Gamma_1}(z) = 0 \text{ (car } z \notin U) \\ Ind_{\Gamma_2}(z) = 0 \text{ (car } z \notin V) \end{cases}$.

Or $f \in \mathcal{H}(W)$ donc par la proposition 2.2.1 on a le résultat. □

Cette dernière proposition nous assure donc que la définition de $f(x)$ ne dépend pas du choix de l'ouvert U contenant $\sigma(x)$ sur lequel f est holomorphe.

2.3 Propriétés

Avec cette première proposition nous constatons que l'image d'un élément d'une algèbre de Banach par une application polynomiale est bien ce que nous attendons.

Proposition 2.3.1. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $x \in \mathcal{A}$.*
Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{C}$. Alors $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Démonstration. Par linéarité de l'intégrale, il suffit de montrer le résultat pour $f(z) = z^k, k \geq 0$. Prenons $U = \mathbb{C}$ et $\gamma : t \in [0,1] \mapsto Re^{2i\pi t}$ avec $R > r(x)$. On sait alors que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 \text{ si } |z| < R \\ 0 \text{ si } |z| > R \end{cases}$.

De plus, pour $|z| = R$, $\left(e - \dfrac{x}{z}\right)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{z^n}$ d'après le test de la racine n-ième car $\left\|\dfrac{x^n}{z^n}\right\|^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{|z|}\|x^n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{r(x)}{R} < 1$.
On a

$$2i\pi f(x) = \int_\gamma z^k (ze - x)^{-1}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma z^{k-1}\left(e - \frac{x}{z}\right)^{-1}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma z^{k-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{z^n}\right)\,\mathrm{d}z$$

et par convergence absolue de la série $2i\pi f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_\gamma \frac{1}{z^{n-k+1}}\ \mathrm{d}z\right)x^n$.

Or, pour $m \neq 1$, $\int_\gamma \frac{1}{z^m}\ \mathrm{d}z = 0$ car $z \mapsto \frac{1}{z^m}$ admet $z \mapsto \frac{1}{(1-m)z^{m-1}}$ pour primitive.

Ainsi, $f(x) = \frac{1}{2i\pi}\underbrace{\left(\int_\gamma \frac{1}{z}\ \mathrm{d}z\right)}_{2i\pi \mathrm{Ind}_\gamma(0)} x^k = \mathrm{Ind}_\gamma(0)x^k = x^k$ □

Proposition 2.3.2. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, $x \in \mathcal{A}$ et U un ouvert contenant $\sigma(x)$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes convergeant normalement sur les compacts de U vers une fonction f.*
Alors $\|f_n(x) - f(x)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. Par le lemme (2.1.2), il existe un cycle $\Gamma = \gamma_1 \dot{+} ... \dot{+} \gamma_n$ dans $U \setminus \sigma(x)$ avec $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 \text{ si } z \in \sigma(x) \\ 0 \text{ si } z \notin U \end{cases}$ et où les γ_k sont des chemins fermés orientés positivement.
On a

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_\Gamma f_n(z)(ze-x)^{-1}\ \mathrm{d}z - \int_\Gamma f(z)(ze-x)^{-1}\ \mathrm{d}z\right\| \\
&\quad = \left\|\sum_{k=1}^{m}\int_\Gamma (f_n(z)-f(z))(ze-x)^{-1}\ \mathrm{d}z\right\| \\
&\quad = \left\|\sum_{k=1}^{m}\int_0^1 (f_n(\gamma_k(t))-f(\gamma_k(t)))(\gamma_k(t)e-x)^{-1}\gamma_k'(t)\ \mathrm{d}t\right\| \\
&\quad \leqslant \sum_{k=1}^{m}\int_0^1 |f_n(\gamma_k(t))-f(\gamma_k(t))|\ \|(\gamma_k(t)e-x)^{-1}\|\ |\gamma_k'(t)|\ \mathrm{d}t \quad (1)
\end{aligned}$$

Or, $t \mapsto (\gamma_k(t)e-x)^{-1}$ est continue sur $[0,1]$ compact et est donc bornée par une constante M_k.

Ainsi $(1) \leqslant \sum_{k=1}^{m} M_k \underbrace{\max_{t\in[0,1]}|f_n(\gamma_k(t))-f(\gamma_k(t))|}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0}\int_0^1 |\gamma_k'(t)|\ \mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ □

Le résultat vu dans le cas des applications polynomiales s'étend aux séries entières.

Proposition 2.3.3. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $x \in \mathcal{A}$.*
Si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ a un rayon de convergence $R > r(x)$ alors $f \in \mathcal{H}(x)$ et $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Démonstration. Soit $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. La suite $(f_n)_n$ converge normalement vers f sur les compacts de $D(0,R)$. Ainsi $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ par la proposition (2.3.2) et puisque $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ par la proposition (2.3.1) on obtient le résultat. □

Proposition 2.3.4. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $x \in \mathcal{A}$.*
L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(x) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array}$ *est un homomorphisme d'algèbres.*

Démonstration. $\forall f, g \in \mathcal{H}(x), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a clairement par linéarité de l'intégrale que $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$.
Soient $f, g \in \mathcal{H}(x)$ et soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\sigma(x)$ sur lequel f et g sont holomorphes. Soit K un voisinage de $\sigma(x)$ construit comme dans le lemme (2.1.2). On considère de même L un voisinage de K, de sorte que $K \subset L \subset U$.
On a

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \frac{1}{(2i\pi)^2}\left[\int_{\partial K} f(z)(ze-x)^{-1}\,\mathrm{d}z\right]\left[\int_{\partial L} g(\xi)(\xi e-x)^{-1}\,\mathrm{d}\xi\right] \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\partial K}\int_{\partial L} f(z)g(\xi)(ze-x)^{-1}(\xi e-x)^{-1}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\partial K}\int_{\partial L} f(z)g(\xi)\left[\frac{(ze-x)^{-1}-(\xi e-x)^{-1}}{\xi - z}\right]\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\partial K} f(z)\left[\int_{\partial L}\frac{g(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi\right](ze-x)^{-1}\,\mathrm{d}z \\
&\quad - \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\partial L} g(\xi)\left[\int_{\partial K}\frac{f(z))}{\xi - z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi\right](\xi e-x)^{-1}\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

Or, si $\xi \in \partial L, \xi \notin \overset{\circ}{K}$ donc $\mathrm{Ind}_{\partial K}(\xi) = 0$. D'où, par le théorème de Cauchy, $\displaystyle\int_{\partial K}\frac{f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}z = -2i\pi f(\xi)\mathrm{Ind}_{\partial K}(\xi) = 0$.

De plus, si $z \in \partial K$, $z \in \mathring{L}$ donc $\mathrm{Ind}_{\partial L}(z) = 1$. Ainsi, toujours par le théorème de Cauchy, $\displaystyle\int_{\partial L} \frac{g(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = 2i\pi g(z)\mathrm{Ind}_{\partial L}(z) = 2i\pi g(z)$.
On obtient alors $f(x)g(x) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\partial K} f(z)g(z)(ze-x)^{-1}\,\mathrm{d}z = (fg)(x)$. □

Proposition 2.3.5. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $x \in \mathcal{A}$.*
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}^*$ et $R(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{n_k} \frac{1}{(z-\lambda_k)^j}$.

Alors $R \in \mathcal{H}(x)$ et $R(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{n_k}(x-\lambda_k e)^{-j}$.

Démonstration. - Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ et $Q(z) = \dfrac{1}{z-\lambda}$. Q est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$ donc $Q \in \mathcal{H}(x)$. Soit K un voisinage de $\sigma(x)$ dans $\mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$ construit comme dans le lemme (2.1.2) et notons $I = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\partial K} Q(z)(ze-x)^{-1}\,\mathrm{d}z$.
Par l'équation résolvante (1.2.1) on a :

$$\forall z \in \partial K,\ (ze-x)^{-1} = (\lambda e - x)^{-1} + (\lambda - z)(\lambda e - x)^{-1}(ze-x)^{-1}$$

Ainsi, $\forall z \in \partial K$, $\dfrac{1}{z-\lambda}(ze-x)^{-1} = \dfrac{1}{z-\lambda}(\lambda e-x)^{-1} - (\lambda e-x)^{-1}(ze-x)^{-1}$

En intégrant sur ∂K on obtient :

$$\begin{aligned} I &= (\lambda e-x)^{-1}\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K}\frac{1}{z-\lambda}\,\mathrm{d}z - (\lambda e-x)^{-1}\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K}(ze-x)^{-1}\,\mathrm{d}z \\ &= (\lambda e-x)^{-1}\mathrm{Ind}_{\partial K}(\lambda) + (\lambda e-x)^{-1} \end{aligned}$$

en appliquant la proposition (2.3.2) à $z \mapsto 1$ dans l'intégrale de droite.
Mais par construction de K, $\mathrm{Ind}_{\partial K}(\lambda) = 0$, d'où $I = (\lambda e - x)^{-1}$.

En appliquant la proposition (2.3.4) à $P(z) = \dfrac{1}{(z-\lambda)^n}$ on obtient que $P(x) = (Q^n)(x) = (Q(x))^n = (\lambda e - x)^{-n}$.

- Finalement, en se plaçant sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, on obtient par linéarité de l'intégrale le résultat pour R. □

Ce résultat nous dit plus : grâce à la décomposition en éléments simples, nous voyons que la proposition est vraie pour n'importe quelle fraction rationnelle.

Pour un élément x d'une algèbre de Banach, le théorème (1.2.2) s'étend aux éléments de $\mathcal{H}(x)$.

Théorème 2.3.1 (de l'image spectrale)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, $x \in \mathcal{A}$ et $f \in \mathcal{H}(x)$. Alors $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ où $f(\sigma(x)) = \{f(\lambda), \lambda \in \sigma(x)\}$.*

Démonstration. - Soit $\lambda \in \sigma(x)$ et soit $g(z) = \dfrac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda}$.
Alors $g \in \mathcal{H}(x)$ et $(z - \lambda)g(z) = f(z) - f(\lambda)$. Par la proposition (2.3.4) on a $(x - \lambda e)g(x) = f(x) - f(\lambda)e$. Supposons par l'absurde que $f(\lambda) \notin \sigma(f(x))$. Alors $x - \lambda e$ est inversible d'inverse $g(x)(f(x) - f(\lambda)e)^{-1}$, ce qui contredit que $\lambda \in \sigma(x)$. D'où $f(\lambda) \in \sigma(f(x))$ et donc $f(\sigma(x)) \subset \sigma(f(x))$.

- Réciproquement, soit $\lambda \notin f(\sigma(x))$. Alors $g : z \mapsto \dfrac{1}{f(z) - \lambda} \in \mathcal{H}(x)$ et vérifie $g(x)(f(x) - \lambda e) = e$, ce qui montre que $\lambda \notin \sigma(f(x))$. D'où l'inclusion $\sigma(f(x)) \subset f(\sigma(x))$ puis l'égalité. □

Proposition 2.3.6. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, $x \in \mathcal{A}$ et $f \in \mathcal{H}(x)$. Alors $f(x)$ est inversible $\Leftrightarrow f(z) \neq 0 \ \forall z \in \sigma(x)$.*

Démonstration. $f \in \mathcal{H}(x)$ donc il existe un ouvert V contenant $\sigma(x)$ sur lequel f est holomorphe.
- ($\Leftarrow$) Si $\forall z \in \sigma(x), f(z) \neq 0, g = \dfrac{1}{f}$ est holomorphe sur l'ouvert $\{z \in V, f(z) \neq 0\}$ contenant $\sigma(x)$ donc $g \in \mathcal{H}(x)$.
On a alors $f(x)g(x) = (fg)(x) = e$ et de même $g(x)f(x) = e$, d'où $f(x)$ est inversible.
- ($\Rightarrow$) Réciproquement, supposons qu'il existe $\lambda \in \sigma(x)$ tel que $f(\lambda) = 0$. Alors il existe $g \in \mathcal{H}(V)$ telle que $f(z) = (z - \lambda)g(z) = g(z)(z - \lambda)$. On a donc $f(x) = (x - \lambda e)g(x) = g(x)(x - \lambda e)$. Or, $(x - \lambda e)$ n'est pas inversible donc $f(x)$ ne l'est pas non plus. □

Théorème 2.3.2. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $x \in \mathcal{A}$. Soient $f \in \mathcal{H}(x)$ et $g \in \mathcal{H}(f(x))$. Alors $g \circ f \in \mathcal{H}(x)$ et $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Démonstration. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert contenant $\sigma(x)$ tel que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Soit $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ un ouvert contenant $f(\sigma(x))$ tel que $g \in \mathcal{H}(\Omega_1)$.
Posons $\Omega_0 = f^{-1}(\Omega_1) \cap \Omega$: ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\sigma(x)$ (car $\sigma(x) \subset \Omega$ et $f(\sigma(x)) \subset \Omega_1$ par hypothèse). Posons alors $W = f^{-1}(\mathring{K}) \cap \Omega_0$. W est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\sigma(x)$ et tel que $f(W) \cap (\partial K) \subset \mathring{K} \cap (K \setminus \mathring{K}) = \varnothing$. Ainsi, pour $z \in \partial K$, $h = \dfrac{1}{z-f} \in \mathcal{H}(W)$. Soit $K' \subset W$ un voisinage de $\sigma(x)$ construit comme dans le lemme (2.1.2). Pour $z \in \partial K$ on a par la proposition (2.3.5) : $(ze - f(x))^{-1} = h(x) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\partial K'} (z - f(\xi))^{-1}(\xi e - x)^{-1} \,\mathrm{d}\xi$.
On a alors

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} g(z)(ze - f(x))^{-1} \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\partial K'} g(z)(ze - f(\xi))^{-1}(\xi e - x)^{-1} \,\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K'} \underbrace{\left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} g(z)(ze - f(\xi))^{-1} \,\mathrm{d}z \right)}_{=g(f(\xi))} (\xi e - x)^{-1} \,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K'} g(f(\xi))(\xi e - x)^{-1} \,\mathrm{d}\xi \\
&= (g \circ f)(x)
\end{aligned}$$

□

2.4 Application : Théorème de décomposition de Riesz

Proposition 2.4.1. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et x, y deux éléments de $\mathcal{A}$ qui commutent. Soit $f \in \mathcal{H}(x)$. Alors y et $f(x)$ commutent.*

Démonstration. D'après les propriétés de l'intégrale à valeurs dans $\mathcal{A}$, on a $yf(x) = y\dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\Gamma f(z)(ze - x)^{-1} \,\mathrm{d}z = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\Gamma f(z)y(ze - x)^{-1} \,\mathrm{d}z$ et de même

$f(x)y = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\Gamma f(z)(ze-x)^{-1}y \ \mathrm{d}z.$
Il suffit donc de montrer que y commute avec $(ze-x)^{-1}$ pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\sigma(x)$.
Or, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, $(ze-x)(ze-x)^{-1}y = y$ et

$$\begin{aligned}(ze-x)y(ze-x)^{-1} = (zy-xy)(ze-x)^{-1} &= (yze-yx)(ze-x)^{-1}\\ &= y(ze-x)(ze-x)^{-1}\\ &= y.\end{aligned}$$

Puisque $z \notin \sigma(x), (ze-x)$ est inversible et on obtient alors le résultat en appliquant $(ze-x)^{-1}$ à gauche dans les deux égalités précédentes. $\square$

Théorème 2.4.1. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $T \in \mathcal{B}(E)$. On suppose que $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_n$ où les σ_i sont des fermés deux à deux disjoints. Alors E s'écrit $E = E_1 \bigoplus \ldots \bigoplus E_n$ où les E_i sont des sous-espaces fermés invariants par T et tels que $\sigma(T_{|E_i}) = \sigma_i \quad \forall i \in [\![1, \ldots, n]\!]$.*

Démonstration. $\mathbb{C}$ étant un espace métrique, il est normal donc $\exists\ \Omega_1, \ldots, \Omega_n$ ouverts de $\mathbb{C}$ deux à deux disjoints tels que $\forall i \in [\![1, \ldots, n]\!], \sigma_i \subset \Omega_i$. Posons $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$ et définissons $f_i \in \mathcal{H}(\Omega)$ par $f_i = \mathbf{1}_{\Omega_i}$. Considérons alors $p_i = f_i(T), i = 1, \ldots, n$. Les p_i sont des projections car l'égalité $f_i^2 = f_i$ entraîne $p_i^2 = (f_i(T))^2 = f_i^2(T) = f_i(T) = p_i$.
De plus, pour $i \neq j,\ p_ip_j = 0$ (car $f_if_j = 0$) et $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Id}$ (car $\sum_{i=1}^{n} f_i = \mathbf{1}_\Omega$). En posant $E_i = p_i(E)$ on a $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ et les E_i sont fermés car $E_i = \mathrm{Ker}(I - p_i)$.
La proposition (2.4.1) entraîne que $p_iT = Tp_i$ donc si $y = p_i(x) \in E_i$:

$$T(y) = T(p_i(x)) = T(p_i^2(x)) = T(p_i(y)) = p_i(T(y)) \in E_i$$

D'où l'invariance de E_i par T.
On peut alors considérer l'opérateur $T_i := T_{|E_i} : E_i \to E_i$. Montrons que $\forall i = 1, \ldots, n, \sigma(T_i) = \sigma_i$. Pour cela, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.4.1. *Soit $i \in [\![1, \ldots, n]\!]$. Alors :*
$\lambda \notin \sigma(T_i) \Leftrightarrow \exists R_i \in \mathcal{B}(E)$ tel que $R_i(\lambda)(T - \lambda I) = p_i = (T - \lambda I)R_i(\lambda)$.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si $\lambda \notin \sigma(T_i)$ on considère $R_i(\lambda) : E \to E$ défini par $R_i(\lambda I) = (T_i - \lambda I)^{-1} p_i$, ce qui a un sens car $p_i(E) = E_i$ et $(T_i - \lambda I)^{-1}$ est défini sur E_i. On a bien $(T - \lambda I)R_i(\lambda) = (T_i - \lambda I)(T_i - \lambda I)^{-1} p_i = p_i$.
($\Leftarrow$) Réciproquement, s'il existe un tel $R_i(\lambda) \in \mathcal{B}(E)$, alors on a :
$R_i(\lambda)T - \lambda R_i(\lambda) = R_i(\lambda)(T - \lambda I) = (T - \lambda I)R_i(\lambda) = TR_i(\lambda) - \lambda R_i(\lambda)$ d'où $R_i(\lambda)T = TR_i(\lambda)$. Ainsi, la proposition (2.4.1), $R_i(\lambda)$ et $p_i = f_i(T)$ commutent. D'où E_i est invariant par $R_i(\lambda)$ et donc $T_i - \lambda I$ est inversible d'inverse $R_i(\lambda)_{|E_i}$. □

Montrons que $\sigma(T) = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma(T_i)$. Soit $\lambda \notin \bigcup_{i=1}^{n} \sigma(T_i)$. Puisque $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Id}$, d'après le lemme précédent, $T - \lambda I$ est inversible d'inverse $\sum_{i=1}^{n} R_i(\lambda)$. D'où $\sigma(T) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \sigma(T_i)$.
Réciproquement, si $\lambda \notin \sigma_i$ alors $z \mapsto z - \lambda$ ne s'annule pas dans un voisinage U_i de σ_i. On considère alors $f : (U_i \cap \Omega_i) \cup (\bigcup_{j \neq i} \Omega_j) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par
$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z-\lambda} \text{ si } z \in U_i \cap \Omega_i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. $f \in \mathcal{H}(T)$ et on pose $R = f(T)$.
On a $(z - \lambda)f(z) = f_i(z) = f(z)(z - \lambda)$, d'où $(T - \lambda I)R = p_i = R(T - \lambda I)$ et par donc par le lemme précédent, $\lambda \notin \sigma(T_i)$. On a donc montré que $\forall i = 1, \ldots, n, \sigma(T_i) \subset \sigma_i$.
Ainsi, $\bigcup_{i=1}^{n} \sigma(T_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i = \sigma(T) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \sigma(T_i)$ donc $\sigma(T) = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma(T_i)$ et finalement $\sigma(T_i) = \sigma_i$. □

Ce théorème nous permettra de démontrer le dernier résultat de la partie suivante.

Chapitre 3

Opérateurs hypercycliques

3.1 Introduction aux espaces vectoriels topologiques

Dans cette section nous donnons quelques définitions et résultats sur les espaces vectoriels topologiques nécessaires à l'étude des opérateurs hypercycliques.

Définition 3.1.1. *Un ensemble X est appelé espace vectoriel topologique (evt) (réel si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) si :*
1) X est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$
2) X est un espace topologique
3) La topologie de X est compatible avec la structure d'espace vectoriel de X, c'est-à-dire que les applications $\begin{array}{ccc} X \times X & \longrightarrow & X \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$ *et* $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times X & \longrightarrow & X \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$
sont continues ($X \times X$ et $\mathbb{K} \times X$ étant munis de la topologie produit).

Définition 3.1.2. *Soit X un evt et $A \subset X$.*
On dit que A est équilibré si $\lambda A \subset A$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leqslant 1$.

Théorème 3.1.1. *Soit X un evt sur $\mathbb{K}$, séparé et de dimension finie égale à n. Alors il existe un isomorphisme linéaire bicontinu entre X et $\mathbb{K}^n$.*

Démonstration. On munit $\mathbb{K}^n$ de la norme $\|.\|_\infty$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de X. Soit $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & X \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \end{array}$.

- ϕ est clairement un isomorphisme et est de plus continue.
En effet $\phi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \circ p_i$ où $\begin{array}{rccc} \varphi_i : & \mathbb{K} & \longrightarrow & X \\ & \lambda & \longmapsto & \lambda e_i \end{array}$ et $p_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ la projection sur la i^{me} composante. φ_i et p_i étant continues $\forall i \in [\![1, n]\!]$, ϕ l'est aussi.

- Montrons que ϕ^{-1} est continue.
Il suffit de montrer que ϕ^{-1} est continue en 0.
En effet, si c'est le cas, soit $x \in X,\ x \neq 0$ et montrons que ϕ^{-1} est continue en x. Pour $y \in X$, l'application $\begin{array}{rccc} \tau_y : & X & \longrightarrow & X \\ & z & \longmapsto & z + y \end{array}$ est bicontinue d'inverse τ_{-y}. On remarque que W voisinage ouvert de $0 \Leftrightarrow \tau_x(W)$ voisinage ouvert de x. Or pour $\epsilon > 0$, il existe W_ϵ un voisinage ouvert de 0 tel que $|\phi^{-1}| < \epsilon$ sur W_ϵ. Mais alors pour $y = x + w \in \tau_x(W_\epsilon)$ on a

$$\left|\phi^{-1}(y) - \phi^{-1}(x)\right| = \left|\phi^{-1}(w)\right| < \epsilon$$

d'où la continuité de ϕ^{-1} en x.

Montrons donc que ϕ^{-1} est continue en 0, ce qui revient à montrer qu'il existe $V \in \mathcal{V}(0)$ tel que $\phi^{-1}(V) \subset B$ où B est la boule unité ouverte de $\mathbb{K}^n$ pour $\|.\|_\infty$. En effet, si $|\phi^{-1}| < 1$ sur V alors $\forall \epsilon > 0$, $|\phi^{-1}| < \epsilon$ sur ϵV qui est un voisinage ouvert de 0. Ceci équivaut à $V \subset \phi(B)$.
Soit $S = \{\lambda \in \mathbb{K}^n \mid \|\lambda\|_\infty = 1\}$. S est un compact de $\mathbb{K}^n$ et puisque ϕ est continue et X séparé, $\phi(S)$ est un compact de X. En particulier $\phi(S)$ est un fermé de X. Puisque $0 \notin \phi(S)$ et que $\phi(S)^\complement$ est ouvert, il existe $V \in \mathcal{V}(0)$ tel que $V \cap \phi(S) = \varnothing$.
Par ailleurs, l'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K} \times X & \longrightarrow & X \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$ étant continue en $(0,0)$, il existe U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{K}$ et U' un voisinage ouvert de 0 dans X tels que $\varphi(U, U') \subset V$.
En particulier, $\exists \delta > 0$ tel que $\bar{B}(0, \delta) \subset U$ donc

$$W := \bigcup_{|\lambda| \leqslant \delta} \lambda U' = \bigcup_{0 \leqslant |\lambda| \leqslant \delta} \lambda U' \subset V.$$

De plus, $\forall \lambda \neq 0$, $\begin{array}{rccc} \varphi_\lambda : & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & \lambda x \end{array}$ est bicontinue d'inverse $\varphi_{\frac{1}{\lambda}}$. Donc $\forall \lambda \neq 0$, $\lambda U' = \varphi_\lambda(U')$ est ouvert. W est donc un voisinage ouvert de 0.

W vérifie $W \in \mathcal{V}(0)$, $W \cap \phi(S) \subset V \cap \phi(S) = \varnothing$ et W est équilibré (en effet pour $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leqslant 1$ on a $\forall \mu \in \bar{B}(0,\delta),\ \forall x \in U',\ \lambda\varphi(\mu, x) = \lambda\mu x \in W$ car $|\lambda\mu| \leqslant \delta$).

Montrons par l'absurde que $W \subset \phi(B)$. Si $\exists x \in W$ tel que $\|\phi(x)^{-1}\| \geqslant 1$ alors on peut trouver $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leqslant 1$ et $\|\phi(\lambda x)^{-1}\| = 1$. Alors $\lambda x \in S$ ce qui est impossible car W est équilibré et $W \cap \phi(S) = \varnothing$. □

Remarque : En particulier, cela signifie que tout evt séparé de dimension finie est normable.

Corollaire 3.1.1. *Soient X un evt séparé et M un sev de dimension finie de X. Alors M est fermé dans X.*

Démonstration. Soit $x \in \overline{M}^X$. Posons $F = M + \mathbb{K}x$. On a clairement que $x \in \overline{M}^F$.
Or, en notant τ_F la topologie induite par X sur F, on a que (F, τ_F) est un evt de dimension finie. Soient $n = \dim(F)$ et ϕ l'isomorphisme bicontinu de $\mathbb{K}^n$ sur (F, τ_F) donné par le théorème (3.1.1).
$\phi^{-1}(M)$ étant un sev de $\mathbb{K}^n$, il est fermé dans $\mathbb{K}^n$. Donc M est fermé dans (F, τ_F) par continuité de ϕ^{-1} et donc $x \in M$. □

Définition 3.1.3. *On appelle F-espace un evt dont la topologie peut être définie par une distance complète.*

Définition 3.1.4. *Soient X un espace vectoriel et $C \subset X$. On dit que C est convexe si, $\forall (x,y) \in C^2,\ \forall t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in C$.*

Définition 3.1.5. - *Soit (X, τ) un evt. On dit que (X, τ) est localement convexe si 0 possède une base de voisinages formée d'ensembles convexes.*
- On appelle espace de Fréchet tout F-espace localement convexe.

Proposition 3.1.1. *Un evt $X \neq \{0\}$ n'admet pas de point isolé.*

Démonstration. - Soit $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Supposons que X est un evt.
Alors $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times X & \longrightarrow & X \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$ est continue. Par hypothèse, $\{x_0\}$ est ouvert.
En particulier, $\{x_0\}$ est un voisinage de $p(1, x_0)$ donc il existe U voisinage de

$(1, x_0)$ tel que $p(U) \subset \{x_0\}$ c'est-à-dire que $\forall(\lambda, x) \in U, \lambda x = x_0$
Or, $U = U_1 \times U_2$ où $U_1 \in \mathcal{V}(1)$ dans $\mathbb{K}$, $U_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ dans X et puisqu'il existe $r > 0$ tel que $B(1, r) \subset U_1$, U_1 contient au moins deux points distincts λ et α.
Puisque $x_0 \in U_2$, on doit avoir $\lambda x_0 = \alpha x_0$ ie $(\lambda - \alpha)x_0 = 0$ et donc $x_0 = 0$ car $\lambda - \alpha \neq 0$. Contradiction donc $\{x_0\}$ n'est pas ouvert.

- Il reste à montrer que $\{0\}$ n'est pas ouvert. Soit $x_0 \in X \setminus \{0\}$.
L'application $\begin{array}{rccl} \tau_{x_0} : & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & x + x_0 \end{array}$ est continue (Propriété 3. des evt) et admet une application réciproque τ_{-x_0} continue. Donc τ_{x_0} est un homéomorphisme de X dans X. Si $\{0\}$ était ouvert, $\tau_{x_0}(\{0\}) = \{x_0\}$ le serait aussi, ce qui est faux. $\square$

Lemme 3.1.1. *Soient $X \neq \{0\}$ un $F-$espace et A une partie dense de X. Si $x_1, \ldots, x_n \in A$ alors $A \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ reste une partie dense de X.*

Démonstration. L'ensemble $B := \{x_1, \ldots, x_n\}$ est d'intérieur vide. En effet, s'il était d'intérieur non vide, $\mathring{B}$ serait constitué d'un nombre fini k de points $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$. X étant métrisable, les $\left\{x_{i_j}\right\}$ sont fermés. Mais alors en retirant $k-1$ points à $\mathring{B}$, on obtiendrait qu'un singleton est ouvert, ce qui est impossible d'après la proposition (3.1.1).
Soit alors U un ouvert non vide de X et montrons que $(A \setminus B) \cap U \neq \varnothing$. Par densité de A, $A \cap U \neq \varnothing$ donc $(A \setminus B) \cap U = \varnothing \Leftrightarrow A \cap U \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$. Si c'est le cas, $A \cap U$ est fermé et $A \cap U \neq U$ car U est un ouvert non vide alors que $\overset{\circ}{\widehat{A \cap U}} \subset \mathring{B} = \varnothing$. Dans ce cas, $U \setminus (A \cap U)$ est un ouvert non vide donc par densité de A, $A \cap (U \setminus A \cap U) \neq \varnothing$, ce qui est impossible. Donc $(A \setminus B) \cap U \neq \varnothing$ et $A \setminus B$ est bien dense dans X. $\square$

3.2 Définition et critères d'hypercyclicité

Définition 3.2.1. *Soit X un evt sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Pour $T \in \mathcal{B}(X)$, la T-orbite d'un vecteur $x \in X$ est l'ensemble $O(x, T) = \{T^n(x), n \in \mathbb{N}\}$. On dit qu'un opérateur T est hypercyclique s'il existe $x \in X$ tel que $O(x, T)$ est dense dans X. Un tel vecteur x est alors dit hypercyclique pour T et on note $HC(T)$ l'ensemble de ces vecteurs.*

En particulier, l'espace X est nécessairement séparable.

Avec la proposition suivante, on voit que de tels opérateurs ne peuvent exister que si l'espace X est de dimension infinie.

Proposition 3.2.1. *Il n'existe pas d'opérateurs hypercycliques dans un espace $X \neq \{0\}$ de dimension finie.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe un opérateur hypercyclique T sur X de dimension finie N. Par le théorème (3.1.1) on peut supposer que $X = \mathbb{K}^N$. Soit alors $x \in HC(T)$.
En notant $< A >$ l'espace vectoriel engendré par une partie $A \subset X$, remarquons d'abord que $< x, T(x), \ldots, T^{N-1}(x) >=< T^n(x),\ n \in \mathbb{N} >$.
En effet, soit i =max $\{j \in \mathbb{N} \mid \ \{x, T(x), \ldots, T^j(x)\}$ libre$\}$. Nécessairement $i \leq N-1$ car $\dim(\mathbb{K}^N) = N$. De plus, $T^{i+1}(x) \in E_i :=< x, T(x), \ldots, T^i(x) >$ par définition de i. On a alors :

$$T^{i+2}(x) = T(T^{i+1}(x)) \in < T(x), T^2(x), \ldots, T^{i+1}(x) > \subset E_i$$

et par une récurrence immédiate $T^{i+k}(x) \in E_i\ \forall k \geq 0$. On en déduit que $< T^n(x),\ n \in \mathbb{N} >= E_i$.
En particulier, $O(x,T) \subset E_i$ donc $\mathbb{K}^N = \overline{O(x,T)} \subset E_i$ car E_i est un evt de dimension finie donc fermé par le corollaire (3.1.1). On en déduit que nécessairement $i = N-1$. Ainsi, $\left\{x, T(x), \ldots, T^{N-1}(x)\right\}$ est une base de $\mathbb{K}^N$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$, par densité de $O(x,T), \exists (n_k)_k \subset \mathbb{N}$ tel que $T^{n_k}(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha x$. Donc pour $i \leq N-1, T^{n_k}(T^i(x)) = T^i(T^{n_k}(x)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha T^i(x)$ par continuité de T^i. Puisque $(x, T(x), \ldots, T^{N-1}(x))$ engendre $\mathbb{K}^N$ on en déduit que $\forall y \in \mathbb{K}^N, T^{n_k}(y) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha y$, donc $T^{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \mathrm{Id}$ (car X est de dimension finie). On obtient, par continuité de l'application déterminant, que $(\det T)^{n_k} = \det(T^{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha^N$.
Ainsi, en posant d=det(T), on en déduit que, $\forall a \geq 0, \exists (n_k)_k$ tel que $\mathrm{d}^{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$. Donc $\{\mathrm{d}^n,\ n \geq 0\}$ est dense dans $\mathbb{R}^+$, ce qui est impossible. □

La définition et le lemme qui suivent vont nous permettre de démontrer le théorème de transitivité de Birkhoff qui est essentiel puisqu'il fournit une condition nécessaire et suffisante d'hypercyclicité pour un opérateur.

Définition 3.2.2. *Soit (X, τ) un espace topologique. Une famille B d'ouverts de X est dite une base pour la topologie τ si chaque ouvert peut s'écrire comme réunion d'éléments de B.*

Lemme 3.2.1. *Soit (X, d) un espace métrique séparable. Alors X admet une base dénombrable pour la topologie associée à d.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe une suite $(x_n)_n$ dense dans X. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \left\{B_d(x_n, \frac{1}{k}), k \in \mathbb{N}^*\right\}$. L'ensemble $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ est dénombrable. Montrons que c'est une base pour la topologie associée à d.
Soit U un ouvert non vide de X et $x \in U$. $\exists k > 0$ tel que $B_d(x, \frac{2}{k}) \subset U$.$(x_n)_n$ est dense donc il existe $n \geq 0$ tel que $\mathrm{d}(x, x_n) < \frac{1}{2k}$. Alors $V_x = B_d(x_n, \frac{1}{k}) \in B$ et vérifie $x \in V_x \subset B_d(x, \frac{2}{k}) \subset U$. Ainsi,

$$U = \bigcup_{x\in U} \{x\} \subset \bigcup_{x\in U} V_x \subset U$$

D'où $U = \bigcup_{x\in U} V_x$ avec $V_x \in B$ et donc le résultat. □

Théorème 3.2.1 (de transitivité de Birkhoff)**.** *Soient X un F-espace séparable et $T \in \mathcal{B}(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) T est hypercyclique.
(ii) T est topologiquement transitif, c'est-à-dire :
$\forall\, U, V$ ouverts non vides de $X, \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n(U) \cap V \neq \varnothing$.

Dans ce cas, $HC(T)$ est un $\mathcal{G}_\delta$ dense de X.

Démonstration. - Montrons d'abord que $HC(T)$ est soit vide, soit dense dans X. Si $HC(T) \neq \varnothing$, soit x un vecteur hypercyclique pour T. Alors $O(x, T) \subset HC(T)$. En effet, d'après le lemme (3.1.1), tout ensemble A dense reste dense si on lui retire un nombre fini de points. En particulier, on a $O(x, T) \setminus \{x, T(x)n \ldots, T^{p-1}(x)\} \subset O(T^p(x), T)$. D'où $O(T^p(x), T)$ est dense dans X, c'est-à-dire que $T^p(x) \in HC(T)\ \forall p \geq 0$. On a donc montré que si $HC(T) \neq \varnothing$ alors pour $x \in HC(T), O(x, T) \subset HC(T)$, ce qui montre que $HC(T)$ est dense dans X.

- $(i) \Rightarrow (ii)$: Soit U et V deux ouverts non vides de X. Par ce qui précède, puisque $HC(T) \neq \varnothing$, il est dense dans X donc il existe $x \in HC(T) \cap U$. Mais alors, par densité, $O(x,T) \cap V \neq \varnothing$, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n(x) \in V$. D'où $T^n(U) \cap V \neq \varnothing$.

- $(ii) \Rightarrow (i)$: X étant métrisable et séparable, il admet d'après le lemme (3.2.1) une base dénombrable de voisinages ouverts $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Mais alors,

$$\begin{aligned} x \in HC(T) &\Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N}, O(x,T) \cap V_j \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } T^n(x) \in V_j \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire $HC(T) = \bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (T^n)^{-1}(V_j)$.
$\forall j, n \in \mathbb{N}, (T^n)^{-1}(V_j)$ est ouvert car T^n continu donc $\forall j \in \mathbb{N}, W_j := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (T^n)^{-1}(V_j)$ est ouvert. D'où $HC(T)$ est bien un $\mathcal{G}_\delta$.
Montrons que $\forall j, W_j$ est dense dans X. On pourra alors conclure grâce au théorème de Baire que $HC(T)$ est dense dans X (et en particulier non vide).

$$\begin{aligned} W_j \text{ est dense dans } X &\Leftrightarrow \forall U \text{ ouvert non vide de } X, U \cap W_j \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \forall U \text{ ouvert non vide de } X, \exists n \in \mathbb{N},\ U \cap (T^n)^{-1}(V_j) \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \forall U \text{ ouvert non vide de } X, \exists n \in \mathbb{N},\ T^n(U) \cap V_j \neq \varnothing \end{aligned}$$

Or, (V_j) étant une base dénombrable de voisinages ouverts, cette dernière condition équivaut à la condition (ii). D'où le théorème. □

Corollaire 3.2.1. *Soient X un F-espace séparable et $T \in \mathcal{B}(X)$ inversible, ie tel qu'il existe $T^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ avec $TT^{-1} = T^{-1}T = Id_X$.*
Alors T est hypercyclique si et seulement si T^{-1} est hypercyclique.

Démonstration. C'est immédiat grâce au théorème précédent car pour U et V deux ouverts non vides de X et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$T^n(U) \cap V \neq \varnothing \Leftrightarrow U \cap (T^n)^{-1}(V) \neq \varnothing.$$

□

Définition 3.2.3. *Soient X un evt et $T \in \mathcal{B}(X)$. On dit que T satisfait le critère d'hypercyclicité s'il existe une suite croissante d'entiers $(n_k)_k$, deux parties denses D_1, $D_2 \subset X$ et une suite d'applications $(S_{n_k} : D_2 \to X)_k$ tels que :*

1) $T^{n_k}(x) \to 0 \quad \forall x \in D_1$
2) $S_{n_k}(y) \to 0 \quad \forall y \in D_2$
3) $T^{n_k} S_{n_k}(y) \to y \quad \forall y \in D_2$.

Théorème 3.2.2. *Soient X un F-espace séparable et $T \in \mathcal{B}(X)$.*
Si T satisfait le critère d'hypercyclicité alors T est hypercyclique.

Démonstration. Montrons que T est topologiquement transitif.
Soient U et V deux ouverts non vides de X. Par densité de D_1 et D_2, il existe $x \in D_1 \cap U$ et il existe $y \in D_2 \cap V$.
Alors par hypothèse :

$$x + S_{n_k}(y) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} x \in U$$

et

$$T^{n_k}(x + S_{n_k}(y)) = T^{n_k}(x) + T^{n_k} S_{n_k}(y) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} y \in V.$$

Donc

$$\exists k_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \geqslant k_1 \Rightarrow x + S_{n_k}(y) \in U$$
$$\exists k_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \geqslant k_2 \Rightarrow T^{n_k}(x + S_{n_k}(y)) \in V.$$

Pour $k \geqslant \max(k_1, k_2)$, $T^{n_k}(x + S_{n_k}(y)) \in T^{n_k}(U) \cap V$.
D'où $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $T^{n_k}(U) \cap V \neq \varnothing$. □

Dans les exemples de la section suivante, c'est ce théorème qui nous permettra de démontrer l'hypercyclicité des opérateurs considérés.

3.3 Exemples

Nous allons donner un exemple d'opérateur hypercyclique sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Pour cela, on a besoin de la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. *Pour $U \subset \mathbb{C}$ ouvert, $\mathcal{H}(U)$ est un espace de Fréchet.*

Démonstration. Si $U = \mathbb{C}$, on pose $K_n = \bar{B}(0, n)$.
Sinon, soit $K_n = \left\{ z \in U \mid |z| \leqslant n,\ d\left(z, U^{\complement}\right) \geqslant \dfrac{1}{n} \right\}$.
$(K_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite exhaustive de compacts.

On pose, $\forall n \geqslant 1$, $\|.\|_n : \begin{array}{ccc} \mathcal{H}(U) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ f & \longmapsto & \sup\limits_{K_n} |f| \end{array}$. $(\|.\|_n)_n$ est une famille de semi-normes sur $\mathcal{H}(U)$ vérifiant $\|.\|_n \leqslant \|.\|_m$ pour $n \leqslant m$.

Pour $f, g \in \mathcal{H}(U)$, posons $d(f,g) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, \|f-g\|_n)$.

Alors :
1) d est une distance sur $\mathcal{H}(U)$

2) $\mathcal{H}(U)$ est un evt :
En effet, $\mathcal{H}(U)$ est clairement un espace vectoriel et montrons que les applications

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathcal{H}(U) & \longrightarrow & \mathcal{H}(U) \\ (\lambda, f) & \longmapsto & \lambda f \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{H}(U) \times \mathcal{H}(U) & \longrightarrow & \mathcal{H}(U) \\ (f,g) & \longmapsto & f+g \end{array}$$

sont continues.
Soient $(\alpha, g) \in \mathbb{C} \times \mathcal{H}(U)$ et $\epsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{n>n_0} \frac{1}{2^n} < \epsilon$.

Pour $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} d(\lambda f, \alpha g) &= \sum_{n \leqslant n_0} \frac{1}{2^n} \min(1, \|\lambda f - \alpha g\|_n) + \sum_{n > n_0} \frac{1}{2^n} \min(1, \|\lambda f - \alpha g\|_n) \\ &\leqslant \sum_{n \leqslant n_0} \frac{1}{2^n} \|\lambda f - \alpha g\|_{n_0} + \epsilon \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \|\lambda f - \alpha g\|_{n_0} \leqslant \|\lambda f - \lambda g + \lambda g - \alpha g\|_{n_0} &\leqslant |\lambda| \, \|f-g\|_{n_0} + |\lambda - \alpha| \, \|g\|_{n_0} \\ &< \epsilon \text{ pour } (\lambda, f) \text{ assez proche de } (\lambda, g). \end{aligned}$$

D'où la continuité de φ.
On montre de même la continuité de ψ.

3) $(\mathcal{H}(U), d)$ est complet :
Soit $(f_n)_n \subset \mathcal{H}(U)$ une suite de Cauchy pour d et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\frac{1}{2^n}\min(1, \|f_p - f_q\|_n) \leqslant d(f_p, f_q) \;\; ie \;\; \min(1, \|f_p - f_q\|_n) \leqslant d(f_p, f_q)) \leqslant 2^n d(f_p, f_q)$$

Pour $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{2^n}(0 < \epsilon < 1), \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $p, q \geq N \Rightarrow d(f_p, f_q) < \epsilon'$.
D'où, $p, q \geq N \Rightarrow \min(1, \|f_p - f_q\|_n) \leq \epsilon < 1$, et donc nécessairement $p, q \geq N \Rightarrow \|f_p - f_q\|_n < \epsilon$.
On en déduit que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur les K_n et donc sur les compacts de U (car $(K_n)_n$ est une suite exhaustive de compacts). Elle converge alors uniformément sur les compacts vers $f \in \mathcal{H}(U)$ par le théorème de Weiestrass.

Il reste à montrer que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} f$.
Soit $\epsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{i>n_0} \frac{1}{2^i} < \frac{\epsilon}{2}$ et il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_0 \Rightarrow \|f - f_n\|_{n_0} < \dfrac{\epsilon}{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
n \geq N_0 \Rightarrow d(f, f_n) &= \sum_{1\leq i\leq n_0} \frac{1}{2^i}\min(1, \|f - f_n\|_i) + \sum_{i>n_0} \frac{1}{2^i}\min(1, \|f - f_n\|_i) \\
&\leq \sum_{1\leq i\leq n_0} \frac{1}{2^i} \underbrace{\|f - f_n\|_i}_{\leq \|f-f_n\|_{n_0} \text{ car } n_0 \geq i} + \sum_{i>n_0} \frac{1}{2^i} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{1\leq i\leq n_0} \frac{1}{2^i} + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{car } n \geq N_0 \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

4) 0 admet une base de voisinages convexes :
Posons $\forall j \geqslant 1,\ V_j = \left\{ f \in \mathcal{H}(U) \mid \|f\|_j < \dfrac{1}{j} \right\}$. Montrons que la famille $(V_j)_j$ convient.
- On a bien $V_j \in \mathcal{V}(0)\ \forall j \geqslant 1$. Soit maintenant $V \in \mathcal{V}(0)$. Il existe $r > 0$ tel que $B_d(0, r) \subset V$. Soit $\epsilon > 0$. Soit $j \geqslant 1$ suffisamment grand, de sorte que $\epsilon + \dfrac{1}{j} < r$ et $\displaystyle\sum_{n>j} \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Montrons que $V_j \subset B_d(0, r)$.

Soit $f \in V_j$. Alors

$$\begin{aligned} d(f,0) = \sum_{1\leqslant n\leqslant j} \frac{1}{2^n}\min(1,\|f\|_n) + \sum_{n>j}\frac{1}{2^n}\min(1,\|f\|_n) &\leqslant \sum_{1\leqslant n\leqslant j}\frac{1}{2^n}\underbrace{\|f\|_j}_{<1/j} + \sum_{n>j}\frac{1}{2^n} \\ &\leqslant \frac{1}{j}+\epsilon \\ &< r. \end{aligned}$$

D'où $f \in B_d(0,r) \subset V$. Donc $(V_j)_{j\geqslant 1}$ est une base de voisinages de 0.

- Montrons que $\forall j \geqslant 1$, V_j est convexe. C'est évident car si f, $g \in V_j$ et $\lambda \in [0,1]$,

$$\|\lambda f + (1-\lambda)g\|_j \leqslant \lambda\|f\|_j + (1-\lambda)\|g\|_j \leqslant \lambda\frac{1}{j} + (1-\lambda)\frac{1}{j} = \frac{1}{j}.$$

D'où $\lambda f + (1-\lambda)g \in V_j$.

□

Exemple 1 : L'opérateur $\begin{array}{rccc} D: & \mathcal{H}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{H}(\mathbb{C}) \\ & f & \longmapsto & f' \end{array}$ est hypercyclique.

- Montrons d'abord que $\mathbb{C}[z]$ est dense dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ pour d.
Pour cela montrons que toute fonction $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ est approchable par des polynômes sur les compacts de $\mathbb{C}$. Il suffit de le vérifier pour les compacts B_n où B_n désigne la boule unité fermée centrée en 0 de rayon n (car ils forment une suite exhaustive de compacts de $\mathbb{C}$).
Soit alors $n \geqslant 1$. Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, f s'écrit $f(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Posons $f_p(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k$. Alors :

$$\begin{aligned} \sup_{z\in B_n}|f(z)-f_p(z)| = \sup_{z\in B_n}\left|\sum_{k=p+1}^{+\infty} a_k z^k\right| &\leqslant \sup_{z\in B_n}\sum_{k=p+1}^{+\infty}|a_k|\,|z|^k \\ &\leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty}|a_k|\,n^k \\ &\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ comme reste d'une série convergente.} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

- Pour montrer que D est hypercyclique appliquons le critère d'hypercyclicité avec $n_k = k$, $D_1 = D_2 = \mathbb{C}[z]$ et $S_k = S^k$ où $Sf(z) = \displaystyle\int_0^z f(\xi)\mathrm{d}\xi$.
La condition 1) est directe car pour $P \in \mathbb{C}[z]$ avec $\deg(P) = n$ on a $D^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0$.
Pour la condition 2) on remarque que $S_k(z^p) = \dfrac{p!}{(p+k)!} z^{p+k}$,
donc $\sup\limits_{z \in B_n} |S_k(z^p)| \leqslant \dfrac{p!}{(p+k)!} n^{p+k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'où la convergence uniforme vers 0 sur les compacts, c'est-à-dire :
$S_k(z^p) \underset{k \to +\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} 0$.
Par linéarité on en déduit que $S_k(P) \underset{k \to +\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} 0$ pour tout $P \in \mathbb{C}[z]$.

La condition 3) est claire car $D^k S_k = Id$ sur $\mathbb{C}[z]$.
D'où l'hypercyclicité de D par le théorème (3.2.2).

Remarque : Une question naturelle est alors de savoir s'il est possible de donner explicitement un exemple de vecteur hypercyclique pour l'opérateur de dérivation. C'est le travail effectué par G. R. MacLane. En effet, dans son article *Sequences of derivatives and normal families*, il affirme dans un théorème l'existence d'un tel vecteur. L'énoncé est le suivant :

Théorème 3.3.1. *Il existe une fonction entière U satisfaisant :*
1) $|U(z)| = O(e^{(1+\epsilon)|z|})$ pour tout $\epsilon > 0$ et,
2) Si D est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et φ une fonction holomorphe sur D, alors il existe une suite d'entiers positifs $(n_j)_j$ telle que $U^{(n_j)} \to \varphi$ uniformément sur les compacts de D.

La preuve, que nous ne faisons pas dans ce mémoire, a pour point de départ le théorème de Runge qui permet alors la construction de la fonction cherchée.

Exemple 2 : Soit $D : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ x = (x_n)_{n=0}^{+\infty} & \longmapsto & (x_1, x_2, \ldots) \end{array}$.
Alors λL est hypercyclique pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > 1$.

Remarque : Tout opérateur hypercyclique T sur X vérifie nécessairement $\|T\| > 1$ car sinon

$$\forall x \in X,\ \|T^n(x)\| \leqslant \|T^n\|\,\|x\| \leqslant \underbrace{\|T\|^n}_{\leqslant 1}\|x\| \leqslant \|x\|$$

et donc toute orbite est bornée et ne peut alors être dense.

Dans cet exemple, L étant de norme 1, λL est de norme $|\lambda|$ et donc λL ne peut être hypercyclique que si $|\lambda| > 1$.
Appliquons le critère d'hypercyclicité à la suite $(n_k)_k = (k)_{k\geqslant 1}$, aux ouverts denses $D_1 = D_2 = c_{00}(\mathbb{N})$ (les suites nulles à partir d'un certain rang) et aux applications $S_k = \lambda^{-k}R^k$ où R est l'opérateur de décalage à droite.

La condition 1) est claire car si $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ est nulle à partir du rang n_0 alors $(\lambda L)^n(x) = 0\ \ \forall n \geqslant n_0$.
Pour la condition 2) on remarque que l'on a pour $y \in c_{00}$,

$$\|S_n y\|_{\ell^2} = \frac{1}{|\lambda|^n}\|R^n y\| = \frac{1}{|\lambda|^n}\|y\|_{\ell^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il reste à vérifier la condition 3) : soit $y = (y_n)_{n\geqslant 0} \in c_{00}$, on a

$$\begin{aligned}(\lambda L)^k S_k(y) &= \lambda^k L^k(\lambda^{-k}(0,\dots,0,y_0,y_1,\dots)) \text{ où } y_0 \text{ est à la } (k+1)\text{ème place}\\ &= L^k((0,\dots,0,y_0,y_1,\dots))\\ &= (y_0,y_1,\dots)\\ &= y.\end{aligned}$$

Le théorème (3.2.2) nous donne alors le résultat.

3.4 Spectre d'un opérateur hypercyclique

Dans cette section, nous allons démontrer un résultat sur le spectre d'un opérateur hypercyclique, dont voici l'énoncé :

Théorème 3.4.1. *Soient X un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur hypercyclique. Alors toute composante connexe du spectre de T intersecte le cercle unité.*

Avant de faire la preuve, nous avons besoin des trois lemmes suivants.

On rappelle que $C = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| = 1\}$ et $D = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| < 1\}$.

Lemme 3.4.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$.*
1) Supposons que $\sigma(T) \subset D$. Alors il existe $a < 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\|T^n(x)\| \leqslant a^n \|x\|$ pour tout $x \in X$ et tout $n \geq N$.
2) Supposons que $\sigma(T) \subset \mathbb{C} \setminus \bar{D}$. Alors il existe $A > 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\|T^n(x)\| \geq A^n \|x\|$ pour tout $x \in X$ et tout $n \geq N$.

Démonstration. 1) $\sigma(T)$ étant compact, on a vu qu'il existait $\lambda \in \sigma(T)$ tel que $|\lambda| = r(T)$. En particulier $\lambda \in D$ donc $|\lambda| < 1$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $|\lambda| + \epsilon < 1$, et posons $a = |\lambda| + \epsilon$. Par la formule du rayon spectral (1.2.4), $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = |\lambda|$. Donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \|T^n\|^{1/n} \leq a$. Ainsi, $\forall n \geq N, \|T^n\| \leq a^n$. Pour $x \in X$ et $n \geq N$ on a alors

$$\|T^n(x)\| \leq \|T^n\| \|x\| \leq a^n \|x\| .$$

2) Puisque $0 \notin \sigma(T)$, T est inversible. Montrons que $\sigma(T^{-1}) \subset D$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \geq 1$. Alors $S := T - \dfrac{1}{\lambda} I$ est inversible car $\left|\dfrac{1}{\lambda}\right| \leq 1$ et par hypothèse $\sigma(T) \subset \mathbb{C} \setminus \bar{D}$. Alors $T^{-1}S = I - \dfrac{1}{\lambda}T^{-1}$ est inversible d'inverse $S^{-1}T$ et donc $T^{-1} - \lambda I = (-\lambda)T^{-1}S$ également d'inverse $(-\lambda)S^{-1}T$. Donc $\lambda \notin \sigma(T^{-1})$. En appliquant le raisonnement de 1) à T^{-1} on obtient qu'il existe $a < 1$ tel que $\|(T^{-1})^n(x)\| \leq \|(T^{-1})^n\| \|x\| \leq a^n \|x\|$. L'égalité précédente appliquée à $T^n(y), y \in X$, nous donne $\|y\| \leq a^n \|T^n(y)\|$. Pour $A := \dfrac{1}{a}$ on a alors $|A| > 1$ et $\forall y \in X$,

$$\|T^n(y)\| \geq A^n \|y\| .$$

□

Lemme 3.4.2. *Dans un espace topologique compact K, toute composante connexe $\mathcal{C}$ est l'intersection des ouverts-fermés qui la contiennent.*
En particulier, la composante connexe d'un point $x \in K$ est l'intersection des ouverts-fermés qui contiennent x.

Démonstration. - Soit $(V_i)_{i\in I}$ la famille des ouverts-fermés de K qui contiennent $\mathcal{C}$ et soit $V = \cap_{i\in I} V_i$.
Pour tout $i \in I$, $\mathcal{C} \subset V_i$ donc $\mathcal{C} \subset V$.
Pour montrer que $V \subset \mathcal{C}$, il suffit de prouver que V est connexe. Supposons par l'absurde que V est la réunion de deux fermés de V disjoints non vides F_1 et F_2. V est fermé comme intersection de fermés donc F_1 et F_2 sont fermés dans K. Puisque K est compact, il est normal, donc il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 de K tels que $F_1 \subset U_1$ et $F_2 \subset U_2$.
On a $\mathcal{C}$ fermé car c'est une composante connexe et $\mathcal{C} = (\mathcal{C} \cap F_1) \cup (\mathcal{C} \cap F_2)$ est la réunion de deux fermés disjoints. Par connexité, $\mathcal{C} \cap F_1 = \varnothing$ ou $\mathcal{C} \cap F_2 = \varnothing$. On suppose sans perte de généralité que $\mathcal{C} \cap F_2 = \varnothing$. Ainsi $\mathcal{C} \subset F_1 \subset U_1$.
Or, $V \subset U_1 \cup U_2 := U$ donc $V \cap U^{\complement} = \varnothing$ c'est-à-dire $\cap_{i\in I}(V_i \cap U^{\complement}) = \varnothing$. K étant compact et les ensembles $V_i \cap U^{\complement}$ fermés, il existe $J \subset I$ finie telle que $\cap_{i\in J}(V_i \cap U^{\complement}) = (\cap_{i\in J} V_i) \cap U^{\complement} = \varnothing$. $W_J := \cap_{i\in J} V_i$ est un ouvert-fermé contenant $\mathcal{C}$. L'ensemble $W_J \cap U_1$ est ouvert comme intersection d'ouverts et fermé car on peut l'écrire $W_J \cap U_1 = W_J \cap (K \setminus U_2)$ (puisque $W_J \subset U_1 \cup U_2$). Par hypothèse $\mathcal{C} \subset U_1$ donc $W_J \cap U_1$ est un ouvert-fermé contenant $\mathcal{C}$. Mais alors $V \subset (W_J \cap U_1) \subset U_1$, ce qui contredit le fait que $(V \cap U_2) \supset (V \cap F_2) \neq \varnothing$. Donc V est bien connexe et $\mathcal{C} = V$.

- Soit $x \in K$. Soit $(V_i)_{i\in I}$ la famille des ouverts-fermés contenant x. D'après ce qui précède, la composante connexe $\mathcal{C}$ de x est l'intersection des ouverts-fermés contenant $\mathcal{C}$ qui contient l'intersection des V_i. Pour voir l'inclusion réciproque, il suffit de montrer que chaque V_i contient $\mathcal{C}$. Soit alors $i \in I$. On a $K = V_i \cup V_i^{\complement}$ donc $\mathcal{C} = (\mathcal{C} \cap V_i) \cup (\mathcal{C} \cap V_i^{\complement})$ est réunion de deux fermés disjoints. Par connexité, $\mathcal{C} \cap V_i^{\complement} = \varnothing$ car $x \in \mathcal{C} \cap V_i$. D'où $\mathcal{C} \subset V_i$ et donc le résultat. $\square$

Lemme 3.4.3. *Soient K un compact de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C}$ une composante connexe de K. On suppose qu'il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ contenant $\mathcal{C}$. Alors il existe un sous-ensemble V de K ouvert et fermé tel que $\mathcal{C} \subset V \subset \Omega$.*

Démonstration. Par le lemme précédent, $\mathcal{C} = \cap_{i\in I} V_i$ où les V_i sont les ouverts-fermés de K contenant $\mathcal{C}$. Or $\mathcal{C} \subset \Omega$ donc $\cap_{i\in I}(V_i \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega)) = \varnothing$. K étant compact et les ensembles $V_i \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega)$ fermés, il existe $J \subset I$ finie telle que $\cap_{i\in J}(V_i \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega)) = (\cap_{i\in J} V_i) \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega) = \varnothing$. Alors $V := \cap_{i\in J} V_i$ est l'ouvert-fermé cherché. $\square$

Nous pouvons à présent démontrer le théorème.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'une composante connexe $\mathcal{C}$ de $\sigma(T)$ n'intersecte pas le cercle unité. Alors $\mathcal{C} = (\mathcal{C} \cap \bar{D}) \cup (\mathcal{C} \cap (\mathbb{C} \setminus D))$ est réunion de deux fermés de $\sigma(T)$. De plus, $(\mathcal{C} \cap \bar{D}) \cap (\mathcal{C} \cap (\mathbb{C} \setminus D)) = \mathcal{C} \cap C = \varnothing$. Par connexité de $\mathcal{C}$ on a $\mathcal{C} \cap \bar{D} = \varnothing$ ou $\mathcal{C} \cap (\mathbb{C} \setminus D) = \varnothing$, et donc $\mathcal{C} \subset \mathbb{C} \setminus \bar{D}$ ou $\mathcal{C} \subset D$.
Par le lemme précédent, il existe U_1 ouvert et fermé tel que $\mathcal{C} \subset U_1 \subset D$ ou $\mathcal{C} \subset U_1 \subset (\mathbb{C} \setminus \bar{D})$. Par le théorème de décomposition de Riesz (2.4.1) appliqué à U_1 et $U_2 := \sigma(T) \setminus U_1$, on peut écrire $X = X_1 \oplus X_2$, X_1, X_2 fermés et $T = T_1 \oplus T_2$ où $T_1 = T_{|X_1}, T_2 = T_{|X_2}$ avec $\sigma(T_1) = U_1$ et $\sigma(T_2) = U_2$.
Montrons que si T est hypercyclique alors T_1 l'est aussi. En notant p_1 la projection de X sur X_1, on remarque que pour tout $x = x_1 + x_2 \in X_1 \oplus X_2$, $T_1^n(x_1) = p_1 T^n(x)$ d'où $O(x_1, T_1) = p_1(O(x, T))$. Soit $x = x_1 + x_2 \in X_1 \oplus X_2$ un vecteur hypercyclique de T. X_1 et X_2 étant fermés, on sait par le théorème (B.0.4) que p_1 est continue. Il vient alors

$$\overline{O(x_1, T_1)} = \overline{p_1(O(x, T))} \supset p_1\left(\overline{O(x, T)}\right) = p_1(X) = X_1$$

ce qui montre que x_1 est un vecteur hypercyclique de T_1.

Or, d'après le lemme (3.4.1), $T_1^n(x_1)$ tend vers 0 ou ∞ pour tout $x_1 \in X_1 \setminus \{0\}$, de sorte que T_1 ne peut être hypercyclique. En effet, si $x_1 \in X_1 \setminus \{0\}$ était un vecteur hypercyclique de T_1 alors $\{\|T_1^n(x_1)\|\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ serait dense dans $\mathbb{R}^+$, ce qui est impossible dans notre cas. On en déduit que T ne peut pas être hypercyclique, d'où la contradiction. □

Corollaire 3.4.1. *Soit $X \neq \{0\}$ un espace de Banach sur $\mathbb{C}$. Un opérateur compact T sur X n'est pas hypercyclique.*

Démonstration. D'après la proposition (3.2.1), on peut supposer que X est de dimension infinie. D'après le théorème (1.3.1), le spectre de T est dénombrable, contient 0 et s'il est infini on peut ranger ses éléments non nuls en une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ |\lambda_{n+1}| \leqslant |\lambda_n|$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n = 0$.
Si $\sigma(T) = \{0\}$ alors d'après le théorème (3.4.1) T n'est pas hypercyclique car $\{0\}$ est une composante connexe du spectre qui n'intersecte pas le cercle unité.
Sinon, d'après la description du spectre, chaque élément non nul λ_i du spectre

est un point isolé de $\mathbb{C}$ donc ouvert dans $\sigma(T)$. $\sigma(T)$ étant compact, on a par la proposition (3.4.2) que la composante connexe $\mathcal{C}(\lambda_i)$ de λ_i est l'intersection des ouverts-fermés contenant λ_i. Puisque $\{\lambda_i\}$ est ouvert et fermé, $\mathcal{C}(\lambda_i) = \{\lambda_i\}$. Mais alors la composante connexe $\mathcal{C}(0)$ de 0 est nécessairement $\{0\}$. En effet, si $\mathcal{C}(0)$ contenait un élément λ_i non nul alors on aurait $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(\lambda_i) = \{\lambda_i\}$, ce qui est une contradiction.
D'après le théorème (3.4.1) T ne peut pas être hypercyclique. $\square$

Annexe A

Analyse complexe

Lemme A.0.4. *Soit f une fonction holomorphe sur $B(z_0, r_0)$. Pour tout $r < r_0$ et tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| < r$ on a :*

$$|f'(z)| \leq \frac{r}{(z - |z - z_0|)^2} max\left\{|f(z_0 + re^{i\theta}|, \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

Démonstration. Par translation, on se ramène au cas $z_0 = 0$.
On écrit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Par les inégalités de Cauchy on a $|a_n| \leq \dfrac{M(r)}{r^n}$ où $M(r) = \max_{|z|=r} \{|f(z)|\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |f'(z)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right| \leq \frac{M(r)}{r} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1} &= \frac{M(r)}{r} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{|z|}{r}\right)^2} \quad \text{car } \left|\frac{z}{r}\right| < 1 \\ &= \frac{rM(r)}{(r - |z|)^2} \end{aligned}$$

□

Théorème A.0.2. *Soit $f : \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{C}$, où Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que :*
- pour tout $t \in X$, $z \mapsto f(z, t)$ est holomorphe sur Ω.
- pour tout $z \in \Omega, t \mapsto f(z, t)$ est mesurable sur $(X, \mathcal{A})$.
- pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une fonction μ-intégrable g_K sur X telle que $|f(z, t)| \leq g_K(t)$ pour tous $z \in K, t \in X$.

Alors la fonction F définie sur Ω par $F(z) = \displaystyle\int_X f(z,t)\mathrm{d}\mu(t)$ est holomorphe sur Ω avec $F'(z) = \displaystyle\int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\mathrm{d}\mu(t)$.

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$ et posons $r_0 = \mathrm{d}(z_0, \Omega^\complement) > 0$ (car $\Omega^\complement$ est fermé). Fixons $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < r_0$ et $t \in X$: sur le compact $K = \overline{B(z_0,r)} \subset \Omega$, la fonction $f_t : z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe et majorée par un nombre $g_K(t)$ indépendant de $z \in K$. Par le lemme précédent on a, $\forall z \in B(z_0,r)$,

$$|f_t'(z)| \leq \frac{r}{(r-|z-z_0|)^2}\max\left\{|f(z_0+re^{i\theta}|, \theta \in \mathbb{R}\right\} \leq \frac{rg_K(t)}{(r-|z-z_0|)^2}$$

En particulier, $\forall z \in V = B(z_0, \frac{r}{2}), |f_t'(z)| \leq \dfrac{4g_K(t)}{r}$.
Le voisinage V étant convexe, on a par le théorème des accroissements finis que f_t est $\dfrac{4g_K(t)}{r}$-lipschitzienne et donc $\forall h \in \mathbb{C}^*, |h| < \dfrac{r}{2}$,

$$\left|\frac{f_t(z_0+h)-f_t(z_0)}{h}\right| \leq \frac{4g_K(t)}{r}$$

Soit $(h_n)_n$ une suite qui converge vers 0. La suite de fonctions $(g_n)_n$ où $g_n : t \mapsto \dfrac{f_t(z_0+h_n)-f_t(z_0)}{h_n}$ converge simplement vers $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)$ et est dominée par la fonction intégrable $\dfrac{4g_K}{r}$ (pour n suffisamment grand). Par le théorème de convergence dominée on obtient que :

$$\frac{F(z_0+h_n)-F(z_0)}{h_n} = \int_X g_n(t)\mathrm{d}\mu(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)\mathrm{d}\mu(t)$$

D'où le résultat. □

Lemme A.0.5. *Soit γ un chemin et f une fonction définie et continue sur $Im(\gamma)$. Pour $m \geqslant 1$ et $z \notin Im(\gamma)$, on pose*

$$F_m(z) = \int_\gamma f(\xi)(\xi - z)^{-m}\mathrm{d}z.$$

Alors F_m est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$ et $F_m'(z) = mF_{m+1}(z)$.

Démonstration. On a $F_m(z) = \displaystyle\int_0^1 f(\gamma(t))(\gamma(t)-z)^{-m}\gamma'(t)\mathrm{d}t$.

Posons $\begin{array}{rrcl} g: & (\mathbb{C}\setminus \mathrm{Im}\gamma)\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (z,t) & \longmapsto & f(\gamma(t))(\gamma(t)-z)^{-m}\gamma'(t) \end{array}$

Alors : - pour tout $t\in[0,1], z\mapsto g(z,t)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}\gamma$.
- pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}\gamma, t\mapsto g(z,t)$ est mesurable car continue par morceaux.
- soit $K\subset\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}\gamma$ un compact. Posons $r = \min\limits_{(s,u)\in K\times\mathrm{Im}\gamma}|s-u| > 0$.
γ étant C^1 par morceaux, γ' est bornée par une constante M_1 sur le compact $[0,1]$. De même, $f\circ g$ est continue sur $[0,1]$ donc bornée par une constante M_2. Alors $|g(z,t)|\leq \dfrac{M_1M_2}{r^m}$ pour tous $z\in K, t\in[0,1]$ et $t\mapsto\dfrac{M_1M_2}{r^m}$ est intégrable sur $[0,1]$.
Par le théorème (A.0.2), F_m est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}\gamma$ avec

$$F'_m(z) = \int_\gamma \frac{\partial}{\partial z}(f(\xi)(\xi-z)^{-m})\mathrm{d}\xi = m\int_\gamma f(\xi)(\xi-z)^{-m-1}\mathrm{d}\xi = mF_{m+1}(z)$$

□

Proposition A.0.1 (Formule intégrale de Cauchy n°1)**.** *Soient $U\subset\mathbb{C}$ un ouvert et $f:U\to\mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit γ un chemin fermé dans U tel que $\forall z\in\mathbb{C}\setminus U,\ Ind_\gamma(z)=0$.*
Alors $\forall a\in U\setminus Im(\gamma),\ Ind_\gamma(a)f(a) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-a}\mathrm{d}\xi$.

Démonstration. Définissons $\begin{array}{rrcl} \varphi: & U\times U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (a,b) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} & \text{si } a\neq b \\ f'(a) & \text{si } a=b \end{cases} \end{array}$.

Lemme A.0.6. *φ est continue.*

Démonstration. On remarque que $\varphi(a,b) = \int_0^1 f'((1-t)a+tb)\mathrm{d}t$.
En effet, pour $a=b$, on a $\displaystyle\int_0^1 f'((1-t)a+tb)\mathrm{d}t = \int_0^1 f'(a)\mathrm{d}t = f'(a)$ et

pour $a \neq b$,

$$\varphi(a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f'(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{b-a}\int_0^1 f'((1-t)a+tb)(b-a)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 f'((1-t)a+tb)\mathrm{d}t$$

φ est clairement continue sur $U \times U \setminus \{(u,u), u \in U\}$.
En un point $(u,u), u \in U$ on a :

$$\begin{aligned} |\varphi(a,b)-\varphi(u,u)| &= \left|\int_0^1 f'((1-t)a+tb))\mathrm{d}t - f'(u)\right| \\ &= \left|\int_0^1 (f'((1-t)a+tb)) - f'(u))\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_0^1 |f'((1-t)a+tb)) - f'(u)|\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. f' étant continue, $\exists\alpha > 0$ tel que $z \in B(u,\alpha) \Rightarrow |f'(z)-f'(u)| < \epsilon$.
Si $(a,b) \in B((u,u),\alpha)$ alors $|a-u| < \alpha$ et $|b-u| < \alpha$ et on a

$$\begin{aligned} |(1-t)a+tb-u| = |(1-t)(a-u)+t(b-u)| &\leq (1-t)|a-u| + t|b-u| \\ &< (1-t)\alpha + t\alpha \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall(a,b) \in B((u,u),\alpha), |\varphi(a,b)-\varphi(u,u)| \leq \displaystyle\int_0^1 \epsilon\ \mathrm{d}t = \epsilon$. D'où la continuité de φ en (u,u). □

Pour $a \in U$ fixé, la fonction $\tilde{\varphi} : z \in U \mapsto \varphi(z,a)$ est alors continue sur U et clairement holomorphe sur $U \setminus \{a\}$. Mais $\tilde{\varphi} \in \mathcal{H}(U\setminus\{a\}) \cap \mathcal{C}(U) \Rightarrow \tilde{\varphi} \in \mathcal{H}(U)$.

Soit $V = \{z \in \mathbb{C} \setminus Im(\gamma) \mid Ind_\gamma(z) = 0\}$.
La fonction $z \mapsto Ind_\gamma(z)$ étant continue sur $\mathbb{C}\setminus Im(\gamma)$ (par le lemme (A.0.5)) et à valeurs entières, V est ouvert comme image réciproque de l'ouvert $\{0\}$ par $Ind_\gamma(.)$ continue.
Par hypothèse $U \cup V = \mathbb{C}$. On définit alors $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par :

$$g(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_\gamma \varphi(z,w)\mathrm{d}w \text{ si } z \in U \\ \displaystyle\int_\gamma (w-z)^{-1} f(w)\mathrm{d}w \text{ si } z \in V \end{cases}.$$

Puisque U et V ne sont pas nécessairement disjoints on vérifie que la fonction g est bien définie.
Si $U \cap V \neq \varnothing$, soit dans ce cas $z \in U \cap V$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_\gamma \varphi(z,w)\mathrm{d}w = \int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\mathrm{d}w &= \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w - f(z)\int_\gamma \frac{1}{w-z}\mathrm{d}w \\ &= \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w - 2i\pi \underbrace{Ind_\gamma(z)}_{=0} f(z) \\ &= \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

D'où g est bien définie.

Par le lemme (A.0.5), g est holomorphe sur V. Montrons qu'elle est holomorphe sur U.
On a, $\forall z \in U, g(z) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(z,\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$.
Alors : - pour tout $t \in [0,1], z \mapsto \varphi(z,\gamma(t))\gamma'(t) = \tilde{\varphi}_{\gamma(t)}(z)\gamma'(t)$ est holomorphe sur U.
- pour tout $z \in U, t \mapsto \varphi(z,\gamma(t))\gamma'(t) = \tilde{\varphi}_z(\gamma(t))\gamma'(t)$ est mesurable car continue par morceaux.
- Soit $K \subset U$ un compact. φ étant continue sur le compact $K \times \mathrm{Im}\gamma \subset U \times U$ et γ C^1 par morceaux, la fonction $t \mapsto \varphi(z,\gamma(t))\gamma'(t)$ est bornée par une constante indépendante de z et de t, pour tous $z \in K$ et $t \in [0,1]$.
Par le théorème (A.0.2) g est alors holomorphe sur U.

Or $Ind_\gamma(.)$ est non nulle sur la composante connexe non bornée. En particulier il existe $R > 0$ tel que $|z| > R \Rightarrow Ind_\gamma(z) = 0$ ie $z \in V$.
De plus, si $r = \max\limits_{z \in Im(\gamma)}$, on a pour $\xi \in Im\gamma$ et $|z| > r$:

$$\left|\frac{1}{z-\xi}\right| \leqslant \frac{1}{|z|-r} \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où pour $|z| > R$,

$$\lim_{|z|\to+\infty} g(z) = \lim_{|z|\to+\infty} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = 0. \tag{A.1}$$

g étant de plus continue, elle est alors bornée sur $\mathbb{C}$.
Mais alors par le théorème de Liouville et par (A.1), elle est nulle.

Ainsi pour $a \in U \setminus Im(\gamma)$ on a :

$$0 = g(a) = \int_\gamma \frac{f(a) - f(w)}{a - w} \mathrm{d}w = \int_\gamma \frac{f(a)}{w - a} \mathrm{d}w - 2i\pi f(a) Ind_\gamma(a).$$

□

Proposition A.0.2 (Formule intégrale de Cauchy n°2)**.** *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ des chemins fermés dans U tels que $\sum_{k=1}^{m} Ind_{\gamma_k}(z) = 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C} \setminus U$.*

Alors pour $a \in U \setminus (Im(\gamma_1) \cup \ldots \cup Im(\gamma_m))$, $f(a) \sum_{k=1}^{m} Ind_{\gamma_k}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z - a} \mathrm{d}z$.

Démonstration. Il suffit d'adapter la preuve précédente : on considère la même foncion φ et l'ouvert $V = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus (Im(\gamma_1) \cup \ldots \cup Im(\gamma_m)) \;\; \middle| \;\; \sum_{k=1}^{m} Ind_{\gamma_k}(z) = 0 \right\}$.
On a $U \cup V = \mathbb{C}$ et on définit alors $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par :

$$g(z) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \varphi(z, w) \mathrm{d}w \text{ si } z \in U \\ \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f(w)(w - z)^{-1} \mathrm{d}w \text{ si } z \in V \end{cases}.$$

g est bien définie et on montre de la même façon que dans la preuve précédente que $g \equiv 0$.
Alors pour $a \in U \setminus (Im(\gamma_1) \cup \ldots \cup Im(\gamma_m))$ on a :

$$0 = g(a) = \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(a) - f(w)}{a - w} \mathrm{d}w = 2i\pi f(a) \sum_{k=1}^{m} Ind_{\gamma_k}(a) - \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{a - w} \mathrm{d}w.$$

D'où le résultat. □

Théorème A.0.3 (de Cauchy)**.** *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ des chemins fermés dans U tels que $\sum_{k=1}^{m} Ind_{\gamma_k}(z) = 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C} \setminus U$.*

Alors $\sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f(z) \mathrm{d}z = 0$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule intégrale de Cauchy n°2 (A.0.2) à la fonction $g(z) = f(z)(z - a)$ qui est bien holomorphe sur U. $\square$

Annexe B

Topologie

Définition B.0.1. - *Un espace métrique est précompact si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E au moyen de boules ouvertes de rayon ϵ.*
- Une partie d'un espace métrique est précompacte si l'espace métrique induit associé est précompact.

Proposition B.0.3. *Si (X, d) est un espace métrique précompact alors pour tout sous-ensemble Y de X muni de la métrique induite notée d', (Y, d') est précompact.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_d\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right)$. Considérons $A = \left\{i \in [\![1, n]\!], Y \cap B_d\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right) \neq \varnothing\right\}$. Pour tout $i \in A$ il existe $y_i \in Y \cap B_d\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right)$ et on a $B_d\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right) \subset B_d(y_i, \epsilon)$. Ainsi, $Y = \bigcup_{i \in A} B_{d'}(y_i, \epsilon)$, ce qui prouve que Y est précompact. □

Théorème B.0.4. *Soit X un espace métrique. Tout partie relativement compacte de X est précompacte. La réciproque est vraie si X est complet.*

Démonstration. - Soit Y une partie relativement compacte de X et $\epsilon > 0$. Alors $\overline{Y} = \bigcup_{x \in \overline{Y}} B(x, \epsilon)$ qui est un recouvrement ouvert de $\overline{Y}$ compact. Il existe donc $x_1, \ldots, x_n \in \overline{Y}$ tels que $\overline{Y} = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$. $\overline{Y}$ est alors précompact et puisque $Y \subset \overline{Y}$, Y l'est également d'après la proposition (B.0.3).

- Supposons maintenant que X est complet. Soit Y une partie précompacte de X et $(x_n)_n \subset Y$. On sait que $\overline{Y}$ est compact si et seulement si de toute suite de Y on peut extraire une sous-suite convergente (dans $\overline{Y}$). Puisque $\overline{Y}$ est complet, il suffit d'extraire de $(x_n)_n$ une sous-suite de Cauchy. Pour cela, construisons par récurrence une suite $(B_k)_k$ de parties de Y vérifiant $\mathrm{diam}(B_k) \leq \frac{1}{k+1}$ et une suite extraite $(x_{\phi(k)})_k$ avec $x_{\phi(i)} \in B_k$ si $i \geq k$. Considérons un recouvrement fini de Y par des boules ouvertes de rayon $\frac{1}{2}$. Puisque $\mathbb{N}$ est infini, au moins l'une de ces boules, que nous noterons B_0, vérifie que l'ensemble $N_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B_0\}$ est infini.
Supposons données des parties $B_0, \ldots, B_k$ de Y vérifiant $\mathrm{diam}(B_i) \leq \frac{1}{i+1}$ et qui sont telles que les ensembles $N_i = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B_i\}$ sont infinis avec $N_{i+1} \subset N_i$ pour $i = 0, \ldots, k-1$. Considérons alors un recouvrement fini de Y par des boules ouvertes de rayon $\frac{1}{2(k+2)}$. N_k étant infini, pour l'une au moins de ces boules, que nous noterons B_{k+1}, l'ensemble $N_{k+1} = \{n \in N_k \mid x_n \in B_{k+1}\}$ est infini.
On peut alors trouver une fonction $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{\phi(n)} \in B_n$. En effet, on choisit $\phi(0) = \min N_0$ et si $\phi(k) \in N_k$ est donné, on choisit $\phi(k+1) = \min\{n \in N_{k+1} \mid n > n_k\}$. De plus, pour $i \geq k$, on a $N_i \subset N_k$ donc $x_{\phi(i)} \in B_k$. Ceci achève la récurrence.
On obtient alors que $\forall i, j \geq k, \mathrm{d}(x_{\phi(i)}, x_{\phi(j)}) \leq \mathrm{diam}(B_k) \leq \frac{1}{k+1}$. Ceci montre que la sous-suite $(x_{\phi(n)})_n$ est de Cauchy, ce qui termine la démonstration. □

Lemme B.0.7. *Soient F un espace vectoriel normé, $E \subset F$ un sous-espace vectoriel de dimension finie et $y \in F$.*
Alors il existe $x \in E$ tel que $\|x - y\| = d(y, E)$.

Démonstration. $0 \in E$ donc $d(y, E) \leqslant \|y - 0\| = \|y\|$, de sorte que $d(y, E)$ ne peut être atteinte que sur $\bar{B}(y, \|y\|) \cap E$ qui est non vide (car cette intersection contient 0). Or l'application $d_y : x \mapsto d(y, x)$ est continue et $\bar{B}(y, \|y\|) \cap E$ est compact comme partie fermée bornée de E qui est de dimension finie. Donc d_y atteint son minimum sur cet ensemble, ce qui correspond à $d(y, E)$. □

Lemme B.0.8. *Soit E un sous-espace vectoriel fermé strict d'un espace vectoriel normé F.*
Alors $\forall \epsilon > 0$ $\exists y \in F$ tel que $\|y\| = 1$ et $d(y, E) \geqslant 1 - \epsilon$.

Démonstration. Soient $\epsilon > 0$ et $y_1 \in F \setminus E$. Alors il existe $x_0 \in E$ tel que $\|x_0 - y_1\| < (1 + \epsilon) d(y_1, E)$. Posons $y_2 = y_1 - x_0$. Puisque $x_0 \in E$,

$d(y_2,E) = d(y_1,E)$ et alors $(1+\epsilon)d(y_2,E) > \|x_0 - y_1\| = \|y_2\|$.
On pose maintenant $y = \dfrac{y_2}{\|y_2\|}$. Alors $y \in F$, $\|y\| = 1$ et si $x \in E$ alors :

$$\begin{aligned}
\|y - x\| = \left\| \frac{y_2}{\|y_2\|} - x \right\| = \frac{1}{\|y_2\|} \left\| y_2 - \|y_2\| \, x \right\| &> \frac{1}{(1+\epsilon)d(y_2,E)} \underbrace{\left\| y_2 - \|y_2\| \, x \right\|}_{\geqslant d(y_2,E)} \\
&\geqslant \frac{1}{1+\epsilon} \\
&> 1 - \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Proposition B.0.4. *Soient E et F deux supplémentaires algébriques d'un espace de Banach X. E et F sont des supplémentaires topologiques si et seulement si E et F sont fermés.*

Démonstration. Supposons donc que E et F sont fermés. Les espaces E et F sont complets car fermés dans X qui est complet. D'après le théorème du graphe fermé, il suffit donc de montrer que le graphe de la projection P sur E parallèlement à F est fermé. Soit donc $(x_n)_n$ une suite dans X telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in X$ et $P(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in E$. Alors $(Id - P)(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x - y$. Comme F est fermé, $(x-y) \in F$. D'où $Px = y$, ce qui prouve que le graphe de P est fermé.
Réciproquement, si E et F sont des supplémentaires topologiques, la projection P sur E parallèlement à F est continue donc $F = \ker(P)$ et $E = \ker(I - P)$ sont fermés. □

Bibliographie

[1] F. Hirsch, G. Lacombe, *Eléments d'analyse fonctionnelle*, Master - Agrégation, 1999.

[2] B. Beauzamy, *Introduction to operator theory and invariant subspaces*, North-Holland Mathematical Library, 1988.

[3] S. Neuwirth, *Théories spectrales*

[4] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, 3ème édition, Dunod, 2009

[5] W. Rudin, *Functional Analysis*, Second edition, McGraw-Hill, 1991

[6] John B. Conway, *A course in Functional Analysis*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, 1996.

[7] John B. Conway, *Functions of one complex variable*, Graduate Texts in Mathematics, 1978.

[8] V. Avanissian, *Initiation à l'analyse fonctionnelle*, Presses universitaires de France, 1996.

[9] G. Lancien, *Topologie générale et analyse fondamentale.*

[10] D. Saada, *Connexité et compacité*, Avril 2010.

[11] F. Bayart, E. Matheron, *Dynamics of linear operators*, Cambridge Tracts In Mathematics, 2009.

[12] J-P. Marco, *Mathématiques L3 - Analyse*, Pearson Education, 2009.