UFR Sciences et Techniques de Besançon
Faculté de mathématiques
Unité Projet

Sous la direction de Monsieur Christian Le Merdy

Fonctions opérateurs-Lipschitz sur les classes de Schatten

Clément Coine

Besançon, 2013 / 2014

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION ET NOTATIONS

Ce mémoire a pour sujet l'étude de l'article de Denis Potapov et Fedor Sukochev, "Operator-Lipschitz functions in Schatten-von Neumann classes". Le résultat principal de cet article est le suivant : pour tout $1 < p < \infty$, il existe une constante $c_p > 0$ telle que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $1-$lipschitzienne et pour tous $a, b \in S_p(H)$ autoadjoints,

$$\|f(a) - f(b)\|_p \leq c_p \|a - b\|_p,$$

où $(S_p(H), \|.\|_p)$ désigne la classe de Schatten d'indice p associée à un espace de Hilbert H.

Dans une première partie, on étudie les classes de Schatten $S_p(H)$, qui forment des sous-ensemble de l'ensemble des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert. Un opérateur T est dans $S_p(H)$ si la suite de ses valeurs singulières est un élément de l_p. A ce titre, les espaces $S_p(H)$ constituent l'analogue non commutatif des espaces l_p. On verra notamment que ce sont des espaces de Banach et que le dual de $S_p(H)$ n'est autre que $S_q(H)$, où q est l'exposant conjugué de p. Une grande partie des résultats de [12] sont démontrés dans le cadre des espaces $L_p(\mathcal{M})$ non commutatifs, associés à une algèbre de Von Neumann $\mathcal{M}$. Les espaces $S_p(H)$ sont le cas particulier où $\mathcal{M} = \mathcal{B}(H)$.

Dans une seconde partie, on donne le lien entre $*-$homomorphismes et mesures spectrales. On verra qu'à tout compact X et à toute $*-$représentation $\pi : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{B}(H)$ on peut associer une mesure spectrale E, dans le sens où

$$\pi(f) = \int_X f \ \mathrm{d}E, \ f \in \mathcal{C}(X).$$

On en déduira que pour tout $a \in \mathcal{B}(H)$ normal, il existe une unique mesure spectrale E^a qui vérifie :

$$\forall f \in \mathcal{C}(\sigma(a)), f(a) = \int_{\sigma(a)} f \ \mathrm{d}E^a.$$

Pour démontrer le résultat principal de l'article, l'idée est alors de construire une mesure spectrale E associée non plus à un opérateur mais à deux opérateurs $a, b \in \mathcal{B}(H)$ normaux, et qui vérifie, sous certaines hypothèses sur a, b et f,

$$f(b) - f(a) = \int_{\sigma(a)\times\sigma(b)} \phi_f \ \mathrm{d}E, \tag{1}$$

où ϕ_f est la fonction des différences divisées de f. Cette mesure spectrale est appelée mesure spectrale jointe. Sa construction est faite dans la dernière section du second chapitre.

Dans une troisième partie, on étudie les espaces dits UMD. On donne une définition de cette propriété en termes de convergence inconditionnelle des différences de martingales. On verra qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace X soit UMD est que la projection de Hilbert soit bornée sur $L^p(\mathbb{T}, X)$. Cela permet notamment de démontrer que les espaces $S_p(H), 1 < p < \infty$, sont UMD. Si X est un espace UMD, on verra que les théorèmes de Littlewood-Paley et de Marcinkiewicz sont valables sur $L^p(\mathbb{T}, X)$. Cela permettra notamment de construire dans une dernière section des multiplicateurs de Schur sur $S_p(H)$.

Enfin, la dernière partie est consacrée à la démonstration du théorème cité en début d'introduction. Il s'agit, au vu de la formule (1), de démontrer que pour $1 < p < \infty$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lipschitzienne, $\pi(\phi_f)$ définit un opérateur borné de $S_p(H)$ dans lui-même, où π désigne l'$*-$homomorphisme associé à une mesure spectrale jointe. L'idée est de commencer par démontrer le résultat lorsque les mesures spectrales sont discrètes, puis d'approcher $\pi(\phi_f)$ par une suite d'opérateurs associée à des approximations discrètes de la mesure spectrale jointe. Pour finir, on donnera un contre-exemple au théorème lorsque $p = 1$.

Notations :

- Si h, k sont deux éléments d'un espace de Hilbert H, on note $\overline{h} \otimes k$ l'élément de $\mathcal{B}(H)$ défini par

$$(\overline{h} \otimes k)(u) = \langle u, h \rangle k, \ u \in H.$$

Alors $\overline{h} \otimes k$ est de rang 1 et tout élément de $\mathcal{B}(H)$ de rang fini est combinaison linéaire d'opérateurs de cette forme.

- Si X est un espace topologique, on note $\mathcal{B}_\infty(X)$ l'espace des fonctions boréliennes bornées sur X, à valeurs complexes.

- Si $(H, \langle , \rangle_H)$ et $(K, \langle , \rangle_K)$ sont deux espaces de Hilbert, on définit sur $H \otimes K$ un produit scalaire $\langle , \rangle$ en posant

$$\langle \sum_i h_i \otimes k_i, \sum_j h'_j \otimes k'_j \rangle = \sum_{i,j} \langle h_i, h'_j \rangle_H \langle k_i, k'_j \rangle_K.$$

Le complété de $H \otimes K$ pour ce produit scalaire est un espace de Hilbert, appelé produit tensoriel hilbertien de H et K. On le note $H \overset{2}{\otimes} K$.

- Pour $A, B \in \mathcal{B}(H)$, on note $[A, B]$ le commutateur de A et B, défini par

$$[A, B] = AB - BA.$$

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est lipschitzienne, on note

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}_1} = \sup_{\lambda \neq \mu} \left| \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} \right|.$$

CHAPITRE 1

CLASSES DE SCHATTEN S_P

1.1 Définition

Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{B}(H)$ compact. Sur $\sigma(T^*T)$ qui est compact, la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 1}$ tels que $P_n(0) = 0$. Puisque $P_n(T^*T)$ est compact pour tout $n \geq 1$ et que l'ensemble des opérateurs compacts est fermé pour la topologie uniforme, on en déduit que $|T| = \sqrt{T^*T}$ est compact. On note $(\lambda_n(T))_{n\geq 1}$ la suite décroissante des valeurs propres de $|T|$, comptées avec multiplicité. Par le théorème de diagonalisation des opérateurs compacts autoadjoints, il existe une base hilbertienne $(v_n)_n$ de $\overline{\mathrm{Im}(T)}$ telle que

$$|T| = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n(|T|)\langle ., v_n\rangle v_n.$$

Par le théorème de décomposition polaire, il existe une isométrie partielle U telle que $T = U|T|$. En posant $u_n = U(v_n)$, on obtient une famille orthonormée $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n(|T|)\langle ., v_n\rangle u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n(|T|)\overline{v_n} \otimes u_n.$$

Cette écriture est appelée décomposition de Schmidt de T. On pose, pour $n \geq 1$, $s_n(T) = \lambda_n(|T|)$. Les $s_n(T)$ sont appelés valeurs singulières de T.

Définition 1.1.1. *Pour* $0 < p < +\infty$ *on définit* $S_p(H) = \left\{ T \in \mathcal{B}(H) \text{ compact} : \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(T)^p < +\infty \right\}$ *qu'on appelle classe de Schatten d'indice* p.

Pour $T \in S_p(H)$ *on pose* $\|T\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} s_n(T)^p \right)^{1/p}$.

Lemme 1.1.1. *Soit* $T \in \mathcal{B}(H)$ *un opérateur compact positif et* $0 < p < +\infty$. *Alors*

$$T \in S_p(H) \Leftrightarrow T^p \in S_1(H).$$

Dans ce cas, $\|T\|_p^p = \|T^p\|_1$.

Démonstration. Soit $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n(T)\langle ., v_n\rangle v_n$ la décomposition de Schmidt de T. Si $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$, on montre par le calcul fonctionnel continu que

$$f(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(\lambda_n(T))\langle ., v_n\rangle v_n.$$

En particulier, puisque $t \mapsto t^p$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $T^p = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n(T)^p\langle ., v_n\rangle v_n$ est la décomposition de Schmidt de T^p. Ainsi, $\|T^p\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n(T)^p = \|T\|_p^p$, d'où le résultat. $\square$

Proposition 1.1.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ compact et $0 < p < +\infty$. Alors*

$$T \in S_p(H) \Leftrightarrow |T|^p = (T^*T)^{p/2} \in S_1(H) \Leftrightarrow T^*T \in S_{p/2}(H).$$

De plus, $\|T\|_p^p = \||T|\|_p^p = \||T|^p\|_1 = \|T^*T\|_{p/2}$.

Démonstration. Par définition, T et $|T|$ ont les mêmes valeurs singulières. On conclut alors par le lemme précédent. $\square$

On va maintenant faire le lien entre les nombres d'approximations d'un opérateur et ses valeurs singulières, ce qui permettra d'obtenir certaines propriétés de ces dernières.

Définition 1.1.2. *Soit un opérateur $T : X \to Y$. On définit ses nombres d'approximations*

$$\alpha_n(T) = \inf \{\|T - T_n\| : T_n : X \to Y, rg(T_n) < n\}, n \geq 1.$$

Proposition 1.1.2. *Soient $S, T \in \mathcal{B}(H)$. Pour tous $n, m \geq 1$,*

(1) $\alpha_{n+m-1}(S + T) \leq \alpha_n(S) + \alpha_m(T)$;
(2) $\alpha_{n+m-1}(ST) \leq \alpha_n(S)\alpha_m(T)$.

Démonstration. (1) Soient $S_n, T_m : H \to K$ deux opérateurs tels que $\mathrm{rg}(S_n) < n$ et $\mathrm{rg}(T_m) < m$. Puisque $\mathrm{rg}(S_n + T_m) < n + m - 1$ on a :

$$\alpha_{n+m-1}(S + T) \leq \|(S + T) - (S_n + T_m)\| \leq \|S - S_n\| + \|T - T_m\|.$$

En passant à la borne inférieure sur les S_n et T_m on obtient le résultat.

(2) Soient S_n et T_m vérifiant les mêmes hypothèses que pour le point (1). On a :

$$\|ST - (S_nT + ST_m - S_nT_m)\| = \|(S - S_n)(T - T_m)\| \leq \|S - S_n\|\|T - T_m\|.$$

Or, $\mathrm{rg}(S_nT + ST_m - S_nT_m) \leq \mathrm{rg}(S_n(T - T_m)) + \mathrm{rg}(ST_m) < n + m - 1$, donc

$$\alpha_{n+m-1}(ST) \leq \inf_{S_n, T_m} \|S - S_n\|\|T - T_m\| = \alpha_n(S)\alpha_m(T).$$

$\square$

Théorème 1.1.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ compact. Alors pour tout $n \geq 1$,*

$$s_n(T) = \alpha_n(T).$$

Démonstration. Soit $T = \sum_n s_n(T)\langle ., v_n\rangle u_n$ la décomposition de Schmidt de T. On définit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'opérateur $U_k : H \longrightarrow K, h \longmapsto \sum_{n=1}^{k-1} s_n(T)\langle h, v_n\rangle u_n$. U_k étant de rang strictement inférieur à k on a :

$$\alpha_k(T) \leq \|T - U_k\| = \left\| \sum_{n=k}^{\infty} s_n(T)\langle ., v_n\rangle u_n \right\| := A.$$

Pour $h = v_k$ on a $\|\sum_{n=k}^{\infty} s_n(T)\langle h, v_n\rangle u_n\| = \|s_k(T)u_k\| = s_k(T)$, donc $A \geq s_k(T)$. D'autre part, puisque $s_k(T) \geq s_n(T)$ pour $n \geq k$ on a, pour tout $h \in H$,

$$\left\| \sum_{n=k}^{\infty} s_n(T)\langle h, v_n\rangle u_n \right\|^2 = \sum_{n=k}^{\infty} s_n(T)^2 |\langle h, v_n\rangle|^2 \leq s_k(T)^2 \sum_{n=k}^{\infty} |\langle h, v_n\rangle|^2 \leq s_k(T)^2\|h\|^2.$$

On en déduit que $A \leq s_k(T)$ et donc que $A = s_k(T)$. Ainsi, $\alpha_k(T) \leq s_k(T)$.
Réciproquement, soit $T_k : H \to K$ de rang strictement inférieur à k. Il existe alors $x \in H$ de la forme $x = \sum_{j=1}^{k} \beta_j v_j$ tel que $\|x\| = 1$ et $T_k x = 0$. On a :

$$\|(T - T_k)x\|^2 = \|Tx\|^2 = \sum_{j=1}^{k} s_j(T)^2 |\beta_j|^2 \geq s_k(T)^2 \sum_{j=1}^{k} |\beta_j|^2 = s_k(T)^2\|x\|^2.$$

Ainsi, $\|T - T_k\| \geq s_k(T)$, donc $\alpha_k(T) \geq s_k(T)$. □

Corollaire 1.1.1. *Soient $S, T \in \mathcal{B}(H)$ avec T compact. Alors pour tout $n \geq 1$,*

(1) $s_n(T) = s_n(T^*)$;
(2) $s_n(ST) \leq \|S\|s_n(T), s_n(TS) \leq \|S\|s_n(T)$.

En particulier, si $T \in S_p(H)$ alors $T^*, ST, TS \in S_p(H)$ et on a alors

$$\|T\|_p = \|T^*\|_p, \|ST\|_p \leq \|S\|\|T\|_p \text{ et } \|TS\|_p \leq \|T\|_p\|S\|.$$

Démonstration. (1) Par la proposition précédente, il suffit de prouver que $\alpha_n(T) = \alpha_n(T^*)$. Soit $T_n \in \mathcal{B}(H)$ tel que $\mathrm{rg}(T_n) < n$. Alors $\mathrm{rg}(T^*) < n$ donc $\alpha_n(T^*) \leq \|T^* - T_n^*\| = \|T - T_n\|$. En passant à la borne inférieure sur les T_n on obtient $\alpha_n(T^*) \leq \alpha_n(T)$. On obtient l'autre inégalité en remplaçant T par T^*. D'où le point (1).

(2) Soit $T_n \in \mathcal{B}(H)$ tel que $\mathrm{rg}(T_n) < n$. Alors $\mathrm{rg}(ST_n) < n$ donc

$$s_n(ST) \leq \|ST - ST_n\| \leq \|S\|\|T - T_n\|.$$

On en déduit que $s_n(ST) = \alpha_n(ST) \leq \|B\|\alpha_n(T) = \|B\|s_n(T)$. On obtient de même la seconde inégalité. □

Corollaire 1.1.2. *Soient $S, T \in \mathcal{B}(H)$ compacts. Pour tout $n \geq 1$,*

$$|s_n(S) - s_n(T)| \leq \|S - T\|.$$

Démonstration. On a

$$s_n(S) = \inf_{\mathrm{rg}(A)<n} \|S-A\| = \inf_{\mathrm{rg}(A)<n} \|T-A+S-T\| \leq \inf_{\mathrm{rg}(A)<n} \|T-A\| + \|S-T\| = s_n(T) + \|S-T\|,$$

et de même, $s_n(T) \leq s_n(S) + \|S-T\|$. D'où le résultat. □

1.2 Propriétés

Dans cette section, on établit certaines inégalités sur les valeurs singulières d'un opérateur compact. Comme dans la démonstration des inégalités de Hölder, on va montrer par des arguments de convexité que $\|.\|_p$ définit une norme sur $S_p(H)$ et que cet espace est complet.

Théorème 1.2.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ compact. Alors pour tout $n \geq 1$,*

$$\prod_{k=1}^{n} |\lambda_k(T)| \leq \prod_{k=1}^{n} s_k(T).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\lambda_n(T) = 0$ l'inégalité est vérifiée et on peut donc supposer que $\lambda_n(T) \neq 0$. T étant compact, il existe une famille orthonormée $(f_m)_{m\geq 1}$ et une suite $(\gamma_{k,l})_{l<k}$ de nombres complexes telles que

$$\forall m \geq 1, Tf_m = \lambda_m(T) f_m + \sum_{l=1}^{m-1} \gamma_{m,l} f_l.$$

En posant $H_n = \mathrm{Vect}(f_m, 1 \leq m \leq n)$, on obtient un sous-espace vectoriel de dimension n, stable par T, et tel que $T_n := T_{|H_n}$ a pour valeurs propres $\lambda_1(T), \ldots, \lambda_n(T)$. On alors

$$|\det T_n| = \left| \prod_{k=1}^{n} \lambda_k(T_n) \right| = \prod_{k=1}^{n} |\lambda_k(T)|.$$

Par la décomposition polaire, il existe $U : H_n \to H_n$ unitaire tel que $T_n = U|T_n|$. De plus, pour $1 \leq k \leq n$ on a $\alpha_k(T_n) \leq \alpha_k(T)$, et par le théorème (1.1.1), $\alpha_k(T_n) = \lambda_k(|T_n|)$. Ainsi,

$$\prod_{k=1}^{n} |\lambda_k(T)| = |\det T_n| = \underbrace{\det U}_{=1} \det |T_n| = \prod_{k=1}^{n} |\lambda_k(|T_n|)| \leq \prod_{k=1}^{n} \alpha_k(T) = \prod_{k=1}^{n} s_k(T).$$

□

Lemme 1.2.1. *Soient $(a_k)_{k=1}^N, (b_k)_{k=1}^N$ deux suites décroissantes de réels positifs telles que pour tout $n = 1, \ldots, N$, $\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et telle que $\varphi(x) \leq \varphi(|x|)$. Alors :*

$$\sum_{k=1}^{N} \varphi(a_k) \leq \sum_{k=1}^{N} \varphi(b_k).$$

Démonstration. Définissons $V = \operatorname{Conv}\left\{(\epsilon_k b_{\sigma(k)})_{k=1}^N : \epsilon_k = \pm 1, \sigma \text{ permutation de } \{1,\dots,N\}\right\}$.
V est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^N$. Montrons que $(a_k)_{k=1}^N \in V$.
Si $(a_k)_{k=1}^N \notin V$, alors par Hahn-Banach il existe une forme linéaire $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ telle que

$$\phi_{|V} \leq 1 \quad \text{et} \quad \phi\left((a_k)_{k=1}^N\right) > 1.$$

V étant invariant par changements de coordonnées et de signe, et puisque $(a_k)_{k=1}^N \subset \mathbb{R}_+$ est décroissante, on peut supposer que $\phi\left((x_j)_{j=1}^N\right) = \sum_{j=1} c_j x_j$ avec $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_N \geq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 < \phi\left((a_k)_{k=1}^N\right) = \sum_{k=1}^N c_k a_k &= c_N \sum_{k=1}^N a_k + \sum_{j=1}^{N-1} (c_j - c_{j-1}) \sum_{k=1}^j a_k \\ &\leq c_N \sum_{k=1}^N a_k + \sum_{j=1}^{N-1} (c_j - c_{j-1}) \sum_{k=1}^j b_k \quad \text{car } c_j - c_{j-1} \geq 0 \text{ et } c_N \geq 0 \\ &= \sum_{k=1}^N c_k b_k \leq 1. \end{aligned}$$

On a une contradiction donc $(a_k)_{k=1}^N \in V$. Ainsi, $(a_k)_{k=1}^N = \sum_{j=1}^s t_j \left(\epsilon_k^j b_{\sigma_j(k)}\right)_{k=1}^N$ où $t_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^s t_j = 1$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \varphi(a_k) = \sum_{k=1}^N \varphi\left(\sum_{j=1}^s t_j \epsilon_k^j b_{\sigma_j(k)}\right) &\leq \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^s t_j \varphi\left(\epsilon_k^j b_{\sigma_j(k)}\right) \quad \text{par convexité de } \varphi \\ &\leq \sum_{j=1}^s t_j \sum_{k=1}^N \varphi\left(b_{\sigma_j(k)}\right) \quad \text{car } \varphi(x) \leq \varphi(|x|) \\ &= \sum_{k=1}^N \varphi(b_k). \end{aligned}$$

□

Théorème 1.2.2. *Pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$ compact et tout $0 < p < \infty$ on a :*

$$\forall N \geq 1, \left(\sum_{n=1}^N |\lambda_n(T)|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\right)^{1/p}.$$

En particulier, $\|(\lambda_n(T))_n\|_p \leq \|T\|_p$.

Démonstration. Soit $N \geq 1$. Il est clair que l'on peut supposer $\lambda_N(T) \neq 0$. Supposons de plus que $|\lambda_N T| \geq 1$ et $s_N(T) \geq 1$. Posons, pour $1 \leq n \leq N$, $a_n = p \ln |\lambda_n(T)|$ et $b_n = p \ln s_n(T)$. Alors $(a_n)_{n=1}^N$ et $(b_n)_{n=1}^N$ sont deux suites décroissantes de réels positifs, et par le théorème (1.2.1), on a pour $1 \leq n \leq N$,

$$\sum_{k=1}^n a_k = p \ln\left(\prod_{k=1}^n |\lambda_k(T)|\right) \leq p \ln\left(\prod_{k=1}^n s_k(T)\right) = \sum_{k=1}^N b_k.$$

En appliquant le lemme précédent avec $\varphi(t) = \exp(t)$ on obtient alors :

$$\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n(T)|^p = \sum_{n=1}^{N} e^{a_n} \leq \sum_{n=1}^{N} e^{b_n} = \sum_{n=1}^{N} s_n(T)^p.$$

Si $0 < \lambda_N(T) < 1$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha\lambda_N(T)| = |\lambda(\alpha T)| \geq 1$ et $s_N(\alpha T) = |\alpha| s_N(T) \geq 1$. On applique ce qui précède en remplaçant T par αT, et on obtient le résultat souhaité.

$\square$

Proposition 1.2.1. *Soient $S, T \in \mathcal{B}(H)$ compacts. Pour tout $n \geq 1$ et $1 \leq p < \infty$ on a :*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} s_k(S+T)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} s_k(S)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} s_k(T)^p\right)^{1/p}.$$

Démonstration. Soit $S+T = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(S+T)\langle ., v_k\rangle u_k$ la décomposition de Schmidt de $S+T$. Soit U l'isométrie partielle définie par $U(v_k) = u_k$ et P la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(v_k, 1 \leq k \leq n)$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} s_k(S+T) = \sum_{k=1}^{n} \langle U^*(S+T)v_k, v_k\rangle &= \sum_{k=1}^{n} \langle U^*(S+T)Pv_k, Pv_k\rangle \\
&= \mathrm{tr}(PU^*(S+T)P) \qquad\qquad \text{car } P^* = P \\
&= \mathrm{tr}(PU^*SP) + \mathrm{tr}(PU^*TP).
\end{aligned}$$

Or, en dimension finie, la trace est égale à la somme des valeurs propres. Par le théorème précédent, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} s_k(S+T) \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k(PU^*SP)| + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k(PU^*TP)| &\leq \sum_{k=1}^{n} s_k(PU^*SP) + \sum_{k=1}^{n} s_k(PU^*TP) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(PU^*SP) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(PU^*TP) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(S) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(T) \\
&= \sum_{k=1}^{n} s_k(S) + \sum_{k=1}^{n} s_k(T).
\end{aligned}$$

Ceci donne le résultat pour $p = 1$.

En appliquant maintenant le lemme (1.2.1) avec $a_k = s_k(S+T)$, $b_k = s_k(S) + s_k(T)$ et $\varphi(t) = t^p$

on trouve :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} s_k(S+T)^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi(s_k(S+T))\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi(s_k(S)+s_k(T))\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} (s_k(S)+s_k(T))^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} s_k(S)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} s_k(T)^p\right)^{1/p}\end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder. □

Théorème 1.2.3. *Pour tout* $1 \leq p < \infty$*,* $(S_p(H), \|.\|_p)$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. La proposition précédente montre que $S_p(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(H)$ et que $\|.\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire. Puisque $\|.\|_p$ vérifie les deux autres axiomes d'une norme, c'est une norme sur $S_p(H)$.

Montrons que $(S_p(H), \|.\|_p)$ est complet. Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $S_p(H)$. Puisque $\|.\| \leq \|.\|_p$ et que l'ensemble des opérateurs compacts est fermé pour la topologie uniforme, il existe $T \in \mathcal{B}(H)$ compact tel que $\|T - T_n\| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Par le corollaire (1.1.2) on a, pour tout $k, n \geq 1$,

$$|s_k(T - T_n) - s_k(T_m - T_n)| \leq \|T - T_m\| \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi,

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |s_k(T-T_n)|^p\right)^{1/p} \leq \limsup_{m\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |s_k(T_m-T_n)|^p\right)^{1/p} = \limsup_{m\to+\infty} \|T_m - T_n\|_p.$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient alors

$$\|T - T_n\|_p \leq \limsup_{m\to+\infty} \|T_m - T_n\|_p.$$

En particulier, $T - T_n \in S_p(H)$ donc $T = (T - T_n) + T_n \in S_p(H)$. De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} \|T - T_n\|_p \leq \lim_{m,n\to+\infty} \|T_m - T_n\|_p = 0.$$

□

Exemple : Les éléments de $S_2(H)$ sont appelés opérateurs de Hilbert-Schmidt. Si $T \in \mathcal{B}(H)$ est compact et si $(h_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H, on montre que

$$\sum_{i\in I} \|Th_i\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^2,$$

de sorte que $T \in S_2(H)$ si et seulement si $\sum_{i\in I} \|Th_i\|^2 < +\infty$. Dans ce cas $\|T\|_2 = \|(Th_i)_{i\in I}\|_{l^2_I(H)}$. On vérifie de plus que $S_2(H)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle , \rangle_{HS}$ donné pour $S, T \in S_2(H)$ par

$$\langle S, T\rangle_{HS} = \sum_{i\in I} \langle Se_i, Te_i\rangle.$$

Proposition 1.2.2. *L'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans* $(S_p(H), \|.\|_p)$.

Démonstration. Soit $T \in S_p(H)$ et $T = \sum_n s_n(T)\langle ., v_n\rangle u_n$ sa décomposition de Schmidt. On définit, comme dans la démonstration du théorème (1.1.1) l'opérateur $U_k = \sum_{n=1}^{k-1} s_n(T)\langle ., v_n\rangle u_n$. Alors U_k est de rang fini et on a $\|T - U_k\|_p^p = \sum_{n=k}^{\infty} s_n(T)^p$. Cette quantité tend vers 0, d'où le résultat. □

1.3 Dual de $S_p(H)$

Soit $T \in S_1(H)$ et $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de $\overline{\mathrm{Im}(T)}$ formée de vecteurs propres de T. On complète cette famille $(e_i)_i$ en une base hilbertienne $(e_j)_{j\in J}$ de H. Le théorème (1.2.2) montre alors que la famille $(\langle Te_j, e_j\rangle)_{j\in J}$ est sommable et que $\sum_j |\langle Te_j, e_j\rangle| \le \|T\|_1$. De plus, si $(f_j)_{j\in J}$ est une autre base hilbertienne de H, alors

$$\sum_{j\in J}\langle Te_j, e_j\rangle = \sum_{j\in J}\langle Tf_j, f_j\rangle.$$

Cette somme commune est appelée trace de T, et notée $tr(T)$. C'est cette forme linéaire qui va nous permettre de décrire le dual de $S_p(T)$. Lorsque $p = +\infty$, on notera $S_\infty(H) = \mathcal{B}(H)$.

Proposition 1.3.1. *Soit* $1 \le p < +\infty$ *et* q *son exposant conjugué. Si* $T \in S_p(H)$ *et* $S \in S_q(H)$ *alors :*
(1) $TS, ST \in S_1(H)$;
(2) $|tr(TS)| \le \|T\|_p\|S\|_q$;
(3) $tr(TS) = tr(ST)$.

Démonstration. (1) Lorsque $p = 1$ le résultat provient du corollaire (1.1.1). Si $p > 1$ on a, d'après la proposition (1.1.2), pour tout $n \ge 1$,

$$\lambda_{2n}(TS) \le \lambda_n(T)\lambda_{n+1}(S) \text{ et } \lambda_{2n-1}(TS) \le \lambda_n(T)\lambda(S).$$

Ainsi,

$$\|TS\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{2n}(TS) + \sum_{n=1}\lambda_{2n-1}(TS) \le \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(T)\lambda_{n+1}(S) + \sum_{n=1}\lambda_n(T)\lambda_n(S) \le 2\|T\|_p\|S\|_q < +\infty$$

par Hölder. Ainsi $TS \in S_1(H)$ et on montre de même que $ST \in S_1(H)$.

(2) Lorsque $p = 1$ on a, toujours par le corollaire (1.1.1),

$$|tr(TS)| \le \|TS\|_1 \le \|T\|_p\|S\|.$$

Supposons maintenant que $p > 1$. Par approximation, on peut supposer S et T de rang fini. Soit $K \subset H$ un sous-espace vectoriel de H contenant les images de S, S^*, T et T^*. On suppose que K est de dimension d. Alors K est stable par les 4 opérateurs précédents, et puisque pour tout $h \in H$,

$\langle SK^\perp, h\rangle = \langle K^\perp, S^*h\rangle = 0$, on a $SK^\perp = 0$. De la même manière on a $S^*K^\perp = TK^\perp = T^*K^\perp = 0$. On en déduit que

$$s_n(S) = s_n(S_{|K}) \text{ pour } 1 \le n \le d, s_n(S) = 0 \text{ pour } n > d,$$

avec les mêmes égalités pour T. Ainsi, quitte à remplacer H par K, on peut supposer H de dimension finie. Dans ce cas, il suffit par densité de démontrer le point (3) pour des opérateurs S et T inversibles. Par le théorème de décomposition polaire, il existe U_1, U_2 deux matrices unitaires et A_1, A_2 deux matrices hermitiennes définies positives telles que $S = A_1U_1$ et $T = A_2U_2$. Par le théorème spectral, il existe V_1, V_2 unitaires et D_1, D_2 deux matrices diagonales à coefficients positifs ayant les mêmes valeurs propres que A_1 et A_2 et telles que $A_1 = V_1D_1V_1^*$ et $A_2 = V_2D_2V_2^*$. En posant $U = V_1^*U_1V_2$ et $V = V_2^*U_2V_1$ qui sont unitaires, le point (3) s'écrit alors, d'après le point (2),

$$|tr(D_1UD_2V)| = |tr(V_1D_1UD_2V_2^*U_2)| \le \|D_1\|_p\|D_2\|_q.$$

En effectuant les produits matriciels, l'inégalité précédente s'écrit encore

$$\left|\sum_{i,j=1}^d u_{i,j}v_{j,i}(d_1)_i(d_2)_j\right| \le \left(\sum_{i=1}^d (d_1)_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^d (d_2)_j^q\right)^{1/q}.$$

Les matrices U et V étant unitaires, on a

$$\sum_{j=1}^d |u_{ij}v_{ji}| \le 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^d |u_{ij}v_{ji}| \le 1.$$

On obtient alors l'inégalité grâce au théorème de convexité de Riesz.

(3) Supposons dans un premier temps que T est de rang fini et montrons le résultat lorsque $S \in \mathcal{B}(H)$. Dans ce cas TS et ST sont de rang fini donc les traces de ces éléments sont bien définies. L'application tr étant linéaire et tout élément de $\mathcal{B}(H)$ étant combinaison linéaire de 4 unitaires, on peut supposer que S est unitaire. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H. Alors $(Se_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H donc on a :

$$tr(TS) = \sum_{i\in I}\langle TSe_i, e_i\rangle = \sum_{i\in I}\langle TSe_i, S^*Se_i\rangle = \sum_{i\in I}\langle (ST)Se_i, Se_i\rangle = tr(ST).$$

Supposons maintenant $T \in S_p(H)$ est quelconque et que $S \in S_q(H)$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe alors T_1 de rang fini tel que $\|T - T_1\|_p < \epsilon$. On a $tr(T_1S) = tr(ST_1)$ donc

$$\begin{aligned}|tr(TS) - tr(ST)| \le |tr(TS) - tr(T_1S)| + |tr(T_1S) - tr(ST)| &= |tr((T-T_1)S)| + |tr(S(T_1-T))| \\ &\le \|(T-T_1)S\|_1 + \|S(T_1-T)\|_1 \\ &\le \|T-T_1\|_p\|S\|_q + \|S\|_q\|T_1-T\|_p \\ &\le 2\epsilon\|S\|_q.\end{aligned}$$

Ceci prouve le troisième point.

$\square$

Proposition 1.3.2. (1) *Soit $1 \leq p < +\infty$ et q son exposant conjugué. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ compact. Alors*

$$T \in S_p(H) \Leftrightarrow \sup\{|tr(ST)| : \|S\|_q = 1\} < +\infty.$$

Dans ce cas, $\|T\|_p = \sup\{|tr(ST)| : \|S\|_q = 1\}$
(2) *Si $T \in \mathcal{B}(H)$ on a*

$$\|T\| = \sup\{|tr(ST)| : \|S\|_1 = 1\}.$$

Démonstration. (1) - Notons $C = \sup\{|tr(ST)| : \|S\|_q = 1\}$. Si $T \in S_p(H)$, la proposition précédente donne l'inégalité $C \leq \|T\|_p < +\infty$.

- Pour la réciproque, supposons dans un premier temps $1 < p < +\infty$. Soit $T = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(T)\langle ., v_n\rangle u_n$ la décomposition de Schmidt de T. On définit

$$S_N = \left(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^p\right)^{-1/q} \sum_{n=1}^{N} s_n(T)^{p/q}\langle ., v_n\rangle u_n.$$

Alors $\|S_N\|_q = \left(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^p\right)^{-1/q} \left(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^p\right)^{1/q} = 1$ et on a, pour tout $h \in H$,

$$\begin{aligned} S_N Th = \left(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^p\right)^{-1/q} \sum_{n=1}^{N} s_n(T)^{p/q}\langle Th, v_n\rangle u_n &= \left(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^p\right)^{-1/q} \sum_{n=1}^{N} s_n(T)^{p/q+1}\langle h, u_n\rangle u_n \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^p\right)^{-1/q} \sum_{n=1}^{N} s_n(T)^{p}\langle h, u_n\rangle u_n \end{aligned}$$

car $\dfrac{p}{q} + 1 = p$. Ainsi, puisque $tr(\langle ., u_n\rangle u_n) = 1$,

$$tr(S_N T) = \left(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^p\right)^{-1/q} \sum_{n=1}^{N} s_n(T)^p = \left(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^p\right)^{1/p},$$

ce qui donne la seconde implication et l'égalité souhaitée.

- Pour $p = 1$, on considère $S_N = \sum_{n=1}^{N}\langle ., v_n\rangle u_n$. On a $\|S_N\| = 1$ et pour tout $h \in H$,

$$S_N Th = \sum_{n=1}^{N}\langle Th, v_n\rangle u_n = \sum_{n=1}^{N} s_n(T)\langle h, v_n\rangle u_n.$$

Ainsi, $tr(S_N T) = \sum_{n=1}^{N} s_n(T)$, ce qui donne le résultat..

(2) Soient $h, k \in H$ tels que $\|h\| = \|k\| = 1$. Alors $\|\overline{h} \otimes k\|_1 = 1$ et $|tr((\overline{h} \otimes k)T)| = |\langle Tk, h\rangle|$. En prenant la borne supérieure sur les h, k, on obtient alors l'égalité souhaitée. □

Théorème 1.3.1. *Soit $1 \leq p < +\infty$ et q son exposant conjugué. Pour $S \in S_q(H)$, on note $\varphi_S : T \in S_p(H) \mapsto tr(TS)$. Alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} S_q(H) & \longrightarrow & S_p(H)^* \\ S & \longmapsto & \varphi_s \end{array}$$

est une isométrie linéaire surjective.

Démonstration. Par la proposition précédente, il suffit de montrer que si $\xi \in S_p(H)^*$, il existe $S \in S_q(H)$ tel que $\xi = \varphi_S$ et $\|S\|_q = \|\xi\|$. Posons, pour $h, k \in H, L(h,k) = \xi(\overline{h} \otimes k)$. L est linéaire en h, antilinéaire en k, et

$$|L(h,k)| \leq \|\xi\| \|\overline{h} \otimes k\|_p \leq \|\xi\| \|h\| \|k\|.$$

Soit $h \in H$ fixé. Alors $k \in H \mapsto \overline{L(h,k)}$ est, d'après l'inégalité précédente, une forme linéaire continue. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $a_h \in H$ tel que pour tout $k \in H, \overline{L(h,k)} = \langle k, a_h \rangle$. Posons $S(h) = a_h$. Grâce à l'unicité de l'élément a_h on montre que S est linéaire. De plus, pour $h \in H$ tel que $\|h\| \leq 1$ on a :

$$\|S(h)\| = \sup_{\|k\| \leq 1} |\langle S(h), k \rangle| = \sup_{\|k\| \leq 1} |L(h,k)| \leq \|\xi\| \|h\|,$$

ce qui prouve que S est borné. Ainsi, $S \in \mathcal{B}(H)$.

Montrons enfin que $S \in S_q(H)$, que $\xi = \varphi_S$ et que $\|S\|_q = \|\xi\|$. Pour tout $h, k \in H$, on a $\xi(\overline{h} \otimes k) = L(h,k) = \langle S(h), k \rangle = tr((\overline{h} \otimes k)S)$. On en déduit que $\xi(T) = tr(TS)$ pour tout T de rang fini. Les opérateurs de rang fini étant denses dans $S_p(H)$ on a :

$$\|S\|_q = \sup_{\substack{\|T\|_p \leq 1 \\ \mathrm{rg}(T) < \infty}} |tr(TS)| = \sup_{\substack{\|T\|_p \leq 1 \\ \mathrm{rg}(T) < \infty}} |\xi(T)| = \|\xi\|,$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

CHAPITRE 2

MESURES SPECTRALES

2.1 Mesures spectrales et $*-$homomorphismes

Définition 2.1.1. *Soit X un ensemble, $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ une tribu et H un espace de Hilbert. Une mesure spectrale pour (X, Ω, H) est une application $E : \Omega \to \mathcal{B}(H)$ telle que :*

(a) *pour tout $\Delta \in \Omega, E(\Delta)$ est une projection orthogonale ;*
(b) *$E(\varnothing) = 0, E(X) = I_H$;*
(c) *$E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$ pour tous $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega$;*
(d) *Si $(\Delta_n)_n$ est une suite d'éléments deux à deux disjoints de Ω, alors*

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n),$$

où la série du membre de droite converge pour la topologie forte des opérateurs.

Exemples : 1. Soit X un compact, Ω la tribu des boréliens de X, μ une mesure sur Ω et $H = L^2(\mu)$. Pour $\Delta \in \Omega$, on définit

$$\begin{array}{rccc} E(\Delta): & H & \longrightarrow & H. \\ & f & \longmapsto & f\mathbb{1}_\Delta \end{array}$$

Alors E est une mesure spectrale.

2. Soit X un ensemble, $\Omega = \mathcal{P}(X)$ et H un espace de Hilbert séparable. Soit $(e_n)_n$ une base hilbertienne de H et $(x_n)_n \subset X$. Pour $\Delta \subset X$, on définit $E(\Delta)$ comme la projection orthogonale d'image $\overline{\bigcup_n \{e_n : x_n \in \Delta\}}$. Alors E est une mesure spectrale.

Lemme 2.1.1. *Soit E une mesure spectrale pour (X, Ω, H) et $x, y \in H$. Alors*

$$E_{x,y}(\Delta) = \langle E(\Delta)x, y\rangle$$

définit une mesure complexe sur Ω, de variation totale inférieure à $\|x\|\|y\|$.

Démonstration. - Soit $\Delta \in \Omega$ et $(\Delta_n)_n$ une partition de Δ en éléments de Ω. Par la propriété (d) de la définition (2.1.1) et la continuité du produit scalaire on a :

$$E_{x,y}(\Delta) = \langle E\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \Delta_n\right) x, y\rangle = \langle \sum_{n=1}^{+\infty} E(\Delta_n)x, y\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle E(\Delta_n)x, y\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} E_{x,y}(\Delta_n),$$

ce qui prouve que $E_{x,y}$ est une mesure complexe sur Ω.

- Soit maintenant $(X_n)_{n\geq 1}$ une partition de X en éléments de Ω. Soit, pour tout $n \geq 1, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha_n| = 1$ et $\alpha_n E_{x,y}(X_n) = |E_{x,y}(X_n)|$. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |E_{x,y}(X_n)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \langle E(X_n)x, y\rangle = \langle \sum_{n=1}^{+\infty} E(X_n)\alpha_n x, y\rangle \leq \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} E(X_n)\alpha_n x \right\| \|y\|.$$

La famille $(E(X_n)\alpha_n x, n \in \mathbb{N}^*)$ étant orthogonale, on a par le théorème de Parseval :

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} E(X_n)\alpha_n x \right\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|E(X_n)\alpha_n x\|^2 = \left\| E\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n\right) x \right\|^2 = \|E(X)x\|^2 = \|x\|^2.$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |E_{x,y}(X_n)| \leq \|x\|\|y\|$, d'où le résultat. □

Soit X un ensemble, Ω une tribu sur X, $\phi : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable et bornée et $\epsilon > 0$ fixé. Posons, pour $n, m \in \mathbb{Z}$, $C_{n,m} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{n\epsilon}{\sqrt{2}} \leq \operatorname{Re}(z) < \frac{(n+1)\epsilon}{\sqrt{2}}, \frac{m\epsilon}{\sqrt{2}} \leq \operatorname{Im}(z) < \frac{(m+1)\epsilon}{\sqrt{2}} \right\}$. On définit alors $\Delta_{n,m} = \phi^{-1}(C_{n,m})$. Les $\Delta_{n,m}$ sont dans Ω, sont deux à deux disjoints et puisque ϕ est bornée, X s'écrit comme une réunion finie de ces ensembles. De plus, on a

$$\sup\left\{ |\phi(x) - \phi(x')| : x, x' \in \Delta_{n,m} \right\} < \epsilon. \tag{2.1}$$

Si $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ est une partition de X en éléments de Ω telle que ϕ vérifie la propriété (2.1) sur les Δ_i, on dira que $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ est une $\epsilon-$partition de ϕ.

Proposition 2.1.1. *Soit E une mesure spectrale pour (X, Ω, H) et $\phi : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable et bornée. Alors il existe un unique $A \in \mathcal{B}(H)$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, toute $\epsilon-$partition $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ de ϕ et tous $x_k \in \Delta_k, 1 \leq k \leq n$,*

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \phi(x_k) E(\Delta_k) \right\| < \epsilon.$$

L'opérateur A obtenu est appelé intégrale de ϕ par rapport à E et est noté $\displaystyle\int_X \phi \; dE$.
On a de plus, pour tous $x, y \in H$,

$$\langle \left(\int_X \phi \; dE \right) x, y\rangle = \int_X \phi \; dE_{x,y}.$$

Démonstration. Posons, pour $x, y \in H, B(x,y) = \int_X \phi \, \mathrm{d}E_{x,y}$. Alors B est une forme sesquilinéaire et par le lemme précédent on a, pour tous $x, y \in H$,

$$|B(x,y)| \leq \|\phi\|_\infty \|x\| \|y\|.$$

On montre alors, comme dans la démonstration du théorème (1.3.1), qu'il existe un unique $A \in \mathcal{B}(H)$ tel que pour tous $x, y \in H, B(x,y) = \langle Ax, y \rangle$.
Soit $\epsilon > 0, (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ une $\epsilon-$partition de ϕ et, pour tous $1 \leq k \leq n$, $x_k \in \Delta_k$. Alors pour tous $x, y \in H$,

$$\begin{aligned}
\left| \langle \left(A - \sum_{k=1}^n \phi(x_k) E(\Delta_k) \right) x, y \rangle \right| = \left| \langle Ax, y \rangle - \sum_{k=1}^n \phi(x_k) \langle E(\Delta_k) x, y \rangle \right| &= \left| \int_X \phi \, \mathrm{d}E_{x,y} - \sum_{k=1}^n \phi(x_k) \langle E(\Delta_k) x, y \rangle \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\Delta_k} (\phi - \phi(x_k)) \, \mathrm{d}E_{x,y} \right| \\
&\leq \epsilon \int_X \mathrm{d}|E_{x,y}| \\
&\leq \epsilon \|x\| \|y\|
\end{aligned}$$

d'après le lemme précédent. D'où le résultat. □

Proposition 2.1.2. *Soit E une mesure spectrale pour (X, Ω, H). Soit $\mathcal{B}_\infty(X)$ l'ensemble des fonctions définies sur X, à valeurs complexes, boréliennes et bornées. On définit*

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathcal{B}_\infty(X) & \longrightarrow & \mathcal{B}(H). \\ & \phi & \longmapsto & \int_X \phi \, dE \end{array}$$

Alors ρ est une $*-$représentation unitale.

Démonstration. Soit $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{B}_\infty(X)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
- Montrons que ρ est linéaire. Pour tout $x, y \in H$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle \rho(\phi_1 + \lambda \phi_2) x, y \rangle = \int_X (\phi_1 + \lambda \phi_2) \, \mathrm{d}E_{x,y} = \int_X \phi_1 \, \mathrm{d}E_{x,y} + \lambda \int_X \phi_2 \, \mathrm{d}E_{x,y} &= \langle \rho(\phi_1) x, y \rangle + \lambda \langle \rho(\phi_2) x, y \rangle \\
&= \langle (\rho(\phi_1) + \lambda \rho(\phi_2)) x, y \rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\rho(\phi_1 + \lambda \phi_2) = \rho(\phi_1) + \lambda \rho(\phi_2)$. D'où la linéarité de ρ.
- Montrons que $\rho(\phi_1 \phi_2) = \rho(\phi_1) \rho(\phi_2)$. Soit $\epsilon > 0$ et soit $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ une $\epsilon-$partition pour ϕ_1, ϕ_2 et $\phi_1 \phi_2$. Soit, pour $1 \leq k \leq n, x_k \in \Delta_k$. On a alors, pour $\phi = \phi_1, \phi_2$ ou $\phi_1 \phi_2$,

$$\left\| \int_X \phi \, \mathrm{d}E - \sum_{k=1}^n \phi(x_k) E(\Delta_k) \right\| < \epsilon. \tag{2.2}$$

Par l'inégalité triangulaire il vient :

$$\begin{aligned}\left\|\int_X \phi_1\phi_2 \ \mathrm{d}E - \left(\int_X \phi_1 \ \mathrm{d}E\right)\left(\int_X \phi_2 \ \mathrm{d}E\right)\right\| &\leq \left\|\int_X \phi_1\phi_2 \ \mathrm{d}E - \sum_{k=1}^n \phi_1(x_k)\phi_2(x_k)E(\Delta_k)\right\| \\ &+ \left\|\sum_{k=1}^n \phi_1(x_k)\phi_2(x_k)E(\Delta_k) - \left(\sum_{k=1}^n \phi_1(x_k)E(\Delta_k)\right)\left(\sum_{j=1}^n \phi_2(x_j)E(\Delta_j)\right)\right\| \\ &+ \left\|\left(\sum_{k=1}^n \phi_1(x_k)E(\Delta_k)\right)\left(\sum_{j=1}^n \phi_2(x_j)E(\Delta_j)\right) - \left(\int_X \phi_1 \ \mathrm{d}E\right)\left(\int_X \phi_2 \ \mathrm{d}E\right)\right\|.\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (2.2), le premier terme est inférieur à ϵ. En utilisant le fait que $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ est une partition de X et la propriété (c) de la définition (2.1.1), on voit que le deuxième terme est nul. En utilisant une nouvelle fois l'inégalité triangulaire, on obtient alors

$$\begin{aligned}&\left\|\int_X \phi_1\phi_2 \ \mathrm{d}E - \left(\int_X \phi_1 \ \mathrm{d}E\right)\left(\int_X \phi_2 \ \mathrm{d}E\right)\right\| \\ &\leq \epsilon + \left\|\left(\sum_{k=1}^n \phi_1(x_k)E(\Delta_k)\right)\left(\sum_{j=1}^n \phi_2(x_j)E(\Delta_j) - \int_X \phi_2 \ \mathrm{d}E\right)\right\| \\ &\quad + \left\|\left(\sum_{k=1}^n \phi_1(x_k)E(\Delta_k) - \int_X \phi_1 \ \mathrm{d}E\right)\left(\int_X \phi_2 \ \mathrm{d}E\right)\right\| \\ &\leq \epsilon(1 + \|\phi_1\|_\infty + \|\phi_2\|_\infty),\end{aligned}$$

ce qui donne l'égalité souhaitée.

- Montrons que $\rho(\overline{\phi_1}) = \rho(\phi_1)^*$. Pour tout $x, y \in H$ et pour tout $\Delta \in \Omega$ on a :

$$\overline{E_{x,y}(\Delta)} = \overline{\langle E(\Delta)x, y\rangle} = \langle y, E(\Delta)x\rangle = \langle E(\Delta)y, x\rangle$$

car $E(\Delta)$ est autoadjoint. Ainsi, $\overline{E_{x,y}} = E_{y,x}$ et on en déduit que

$$\langle \rho(\overline{\phi_1})x, y\rangle = \int_X \overline{\phi_1} \ \mathrm{d}E_{x,y} = \overline{\int_X \phi_1 \ \mathrm{d}\overline{E_{x,y}}} = \overline{\int_X \phi_1 \ \mathrm{d}E_{y,x}} = \overline{\langle \rho(\phi_1)y, x\rangle} = \langle x, \rho(\phi_1)y\rangle = \langle \rho(\phi_1)^*x, y\rangle,$$

ce qui prouve que $\rho(\overline{\phi_1}) = \rho(\phi_1)^*$.

- Enfin, l'égalité $\rho(1) = \displaystyle\int_X 1 \ \mathrm{d}E = E(X) = I_H$ montre que ρ est unitale. □

Si X est un compact Hausdorff on peut, dans la proposition précédente, restreindre ρ à la C^*-algèbre $\mathcal{C}(X)$, ce qui donne une $*-$représentation unitale entre $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{B}(H)$ associée à la mesure spectral E. Le théorème suivant donne la réciproque.

Théorème 2.1.1. *Soient X un compact Hausdorff, H un espace de Hilbert et $\pi : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{B}(H)$ une $*-$représentation unitale. Alors il existe une unique mesure E définie sur les boréliens de X telle que pour tout $\phi \in \mathcal{C}(X)$,*

$$\pi(\phi) = \int_X \phi \ dE.$$

Démonstration. - Par le calcul fonctionnel borélien, on peut étendre π en un $*-$homomorphisme défini sur $\mathcal{B}_\infty(X)$, qu'on note encore π. Si Δ est un borélien de X on pose alors

$$E(\Delta) = \pi(\mathbb{1}_\Delta).$$

Montrons que E est une mesure spectrale pour (X, Ω, H), où Ω désigne la tribu borélienne de X.
(a) Soit $\Delta \in \Omega$. On a

$$E(\Delta)^2 = \pi(\mathbb{1}_\Delta)^2 = \pi(\mathbb{1}_\Delta^2) = \pi(\mathbb{1}_\Delta) = E(\Delta)$$
$$\text{et} \quad E(\Delta)^* = \pi(\mathbb{1}_\Delta)^* = \pi(\overline{\mathbb{1}_{\Delta)}}) = \pi(\mathbb{1}_\Delta) = E(\Delta),$$

ce qui prouve que $E(\Delta)$ est une projection orthogonale.

(b) On a bien $E(\varnothing) = \pi(\mathbb{1}_\varnothing) = \pi(0) = 0$ et $E(X) = \pi(\mathbb{1}_X) = I_H$.

(c) Soient $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega$. Puisque $\mathbb{1}_{\Delta_1 \cap \Delta_2} = \mathbb{1}_{\Delta_1}\mathbb{1}_{\Delta_2}$ et π est un morphisme, on obtient

$$E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2).$$

(d) Soit $(\Delta_n)_{n\geq 1} \subset \Omega$ deux à deux disjoints. Si $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$E\left(\bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k\right) = \pi\left(\mathbb{1}_{\cup_{k=1}^{n}\Delta_k}\right) = \pi\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\Delta_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \pi(\mathbb{1}_{\Delta_k}) = \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k).$$

Posons $\Omega_n = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} \Delta_k$. Soit $h \in H$. La forme linéaire $f \in \mathcal{C}(X) \mapsto \langle \pi(f)h, h\rangle$ étant continue, il existe une mesure complexe μ_h qui représente cette forme linéaire. De plus, par construction du calcul fonctionnel borélien on a, pour $g \in \mathcal{B}_\infty(X), \langle \pi(g)h, h\rangle = \int_X g \, \mathrm{d}\mu_h$. Par ce qui précède on obtient alors

$$\begin{aligned}\left\|E\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \Delta_k\right)h - \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k)h\right\|^2 = \|E(\Omega_n)h\|^2 = \langle E(\Omega_n)h, E(\Omega_n)h\rangle &= \langle E(\Omega_n)h, h\rangle \\ &= \langle \pi(\mathbb{1}_{\Omega_n})h, h\rangle \\ &= \int_X \mathbb{1}_{\Omega_n} \, \mathrm{d}\mu_h,\end{aligned}$$

et puisque χ_{Ω_n} converge simplement vers 0, ce dernier terme tend vers 0 par convergence dominée. Ainsi, E est bien une mesure spectrale.

- Montrons maintenant que pour tout $\phi \in \mathcal{B}_\infty(X)$ (donc en particulier si $\phi \in \mathcal{C}(X)$),

$$\pi(\phi) = \int_X \phi \, \mathrm{d}E.$$

Soit $\phi \in \mathcal{B}_\infty(X)$ et $\epsilon > 0$. Soit $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ une ϵ-partition de ϕ. Soit, pour $1 \leq k \leq n, x_k \in \Delta_k$. Alors

$$\left\|\phi - \sum_{k=1}^{n} \phi(x_k)\mathbb{1}_{\Delta_k}\right\|_\infty.$$

π est contractant car c'est un $*-$homomorphisme, et ainsi

$$\left\| \pi(\phi) - \sum_{k=1}^{n} \phi(x_k) E(\Delta_k) \right\|$$

puisque $\pi(\chi_{\Delta_k}) = E(\Delta_k)$. Ainsi, par la proposition (2.1.1), on a bien $\pi(\phi) = \int_X \phi \; \mathrm{d}E$.

Il reste à démontrer l'unicité de E. Soit F une autre mesure spectrale vérifiant la conclusion du théorème. Alors pour tout $\phi \in \mathcal{C}(X), x, y \in H$,

$$\langle \pi(\phi)x, y \rangle = \int_X \phi \; \mathrm{d}E_{x,y} = \int_X \phi \; \mathrm{d}F_{x,y}.$$

Par l'unicité donné dans le théorème de Riesz, on en déduit que $E_{x,y} = F_{x,y}$. Ainsi, si $\Delta \in \Omega$,

$$\langle E(\Delta)x, y \rangle = E_{x,y}(\Delta) = F_{x,y}(\Delta) = \langle F(\Delta)x, y \rangle,$$

et ceci est vrai pour tous x, y, donc $E(\Delta) = F(\Delta)$, ie $E = F$. □

Théorème 2.1.2. *Soient H un espace de Hilbert et $N \in \mathcal{B}(H)$ normal. Alors il existe une unique mesure spectrale E pour $(\sigma(N), \Omega, H)$, où Ω désigne la tribu borélienne de $\sigma(N)$, telle que pour tout $\phi \in \mathcal{C}(\sigma(X))$,*

$$\phi(N) = \int_{\sigma(N)} f \;\; dE.$$

Démonstration. D'après le calcul fonctionnel continu, il existe une unique $*-$représentation isométrique unitale $\rho : \mathcal{C}(\sigma(N)) \to \mathcal{B}(H)$ telle que $\rho(z) = N$. Par le théorème précédent, il existe alors une unique mesure spectrale E pour $(\sigma(N), \Omega, H)$ telle que pour tout $\phi \in \mathcal{C}(\sigma(N))$,

$$\phi(N) = \rho(\phi) = \int_X \phi \; \mathrm{d}E.$$

□

Définition 2.1.2. *La mesure spectrale E obtenue dans le théorème précédent s'appelle mesure spectrale de l'opérateur N.*

2.2 Mesure spectrale jointe

2.2.1 Normes $\|.\|_{\mathbf{min}}$ et $\|.\|_{\mathbf{max}}$ sur un produit tensoriel de C^*algèbres

Soient A, B deux C^*-algèbres unitales. On définit une involution sur $A \otimes B$ en posant

$$\left(\sum_i a_i \otimes b_i \right)^* = \sum_i a_i^* \otimes b_i^*.$$

On dit que $\|.\|_\gamma$ est une C^*-norme sur $A \otimes B$ si $\|.\|_\gamma$ est une norme sur $A \otimes B$ telle que pour tous $a \in A, b \in B$, $\|a \otimes b\|_\gamma = \|a\|\|b\|$ et pour tous $x, y \in A \otimes B$, $\|xy\|_\gamma \leq \|x\|_\gamma \|y\|_\gamma$ et $\|x^* x\|_\gamma = \|x\|_\gamma^2$. Le complété de $A \otimes B$ par rapport à une C^*-norme $\|.\|_\gamma$ est une C^*-algèbre, notée $A \otimes_\gamma B$. Dans cette section, on s'intéresse à deux C^*-normes, les normes $\|.\|_{\min}$ $\|.\|_{\max}$ et on verra dans la section suivante que pour les C^*-algèbres commutatives unitales, ces deux normes coïncident.

Pour $S \in \mathcal{B}(H_1)$ et $T \in \mathcal{B}(H_2)$, on note $S \otimes_{\mathrm{sp}} T$ l'application linéaire définie sur $H_1 \otimes H_2$ par

$$(S \otimes_{\mathrm{sp}} T)\left(\sum_i h_i \otimes k_i\right) = \sum_i S(h_i) \otimes T(k_i).$$

On vérifie que $\|S \otimes_{\mathrm{sp}} T\| = \|S\|\|T\|$, de sorte que $S \otimes_{\mathrm{sp}} T$ est continue et s'étend donc de façon unique en un élément de $\mathcal{B}(H_1 \overset{2}{\otimes} H_2)$.
Soient A_1 et A_2 deux C^*algèbres unitales et $\pi_1 : A_1 \to \mathcal{B}(H_1)$, $\pi_2 : A_2 \to \mathcal{B}(H_2)$ deux $*-$homomorphismes unitaux. On pose, pour $\sum_i a_i \otimes b_i \in A_1 \otimes A_2$,

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right) = \sum_i \pi_1(a_i) \otimes_{\mathrm{sp}} \pi_2(b_i) \in \mathcal{B}(H_1 \overset{2}{\otimes} H_2).$$

Si $x \in A_1 \otimes A_2$ on définit

$$\|x\|_{\min} = \sup\{\|\pi(x)\| : \pi = \pi_1 \otimes \pi_2, \pi_i : A_i \to \mathcal{B}(H_i) * -\text{représentations unitales}\}.$$

Alors $\|x\|_{\min}$ définit une C^*-norme sur $A \otimes B$ et on a le résultat suivant, démontré dans [16].

Théorème 2.2.1. *Si $\|.\|_\gamma$ est une C^*-norme sur $A_1 \otimes A_2$, alors $\|.\|_{min} \leq \|.\|_\gamma$.*

En particulier, si $\pi_i : A_i \to \mathcal{B}(H_i)$, $i = 1, 2$, sont des $*-$représentations unitales injectives, l'application

$$\begin{array}{ccc} A_1 \otimes A_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ \sum_i a_i \otimes b_i & \longmapsto & \|\sum_i (\pi_1 \otimes \pi_2)(a_i \otimes b_i)\| \end{array}$$

définit une C^*-norme, donc par définition de la norme $\|.\|_{\min}$ et par le théorème précédent on a, pour $x \in A_1 \otimes A_2$,

$$\|x\|_{\min} = \|(\pi_1 \otimes \pi_2)(x)\|.$$

Soit A une C^*-algèbre et X un espace topologique compact. On définit un $*-$homomorphisme de $\mathcal{C}(X) \otimes A$ dans $\mathcal{C}(X, A)$ par

$$\sum_{i=1}^n f_i \otimes a_i \mapsto \left(x \in X \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(x) a_i\right).$$

Cette application est injective, ce qui permet d'identifier $\mathcal{C}(X) \otimes A$ à une partie de $\mathcal{C}(X, A)$. On munit alors $\mathcal{C}(X) \otimes A$ de la norme $\|.\|_\infty$, qui définit sur cet espace une C^*-norme.

Lemme 2.2.1. *$\mathcal{C}(X) \otimes A$ est dense dans $\mathcal{C}(X, A)$.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et $f \in \mathcal{C}(X, A)$. X étant compact, $f(X)$ est un compact de A. Soit $V_1, \ldots, V_m$ un $\epsilon-$réseau de $f(X)$, où, pour tout i, V_i est un ouvert de $f(X)$. Posons $U_i = f^{-1}(V_i)$. Alors $U_1, \ldots, U_m$ est un recouvrement de X et par le théorème de partition de l'unité, il existe des fonctions continues $f_1, \ldots, f_m$ de X dans $[0, 1]$ telles que

$$\sum_{i=1}^m f_i = 1 \text{ et } \mathrm{Supp}(f_i) \subset U_i, i = 1, \ldots, m.$$

Soit, pour tout i, $a_i \in U_i$. Définissons $g = \sum_{i=1}^{m} f_i \otimes x_i \in \mathcal{C}(X) \otimes A$ et vérifions que $\|f-g\|_\infty \le \epsilon$. Si $x \in X$ on a

$$|f(x)-g(x)| = \left|\sum_{i=1}^{m} f_i(x)f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)a_i\right| \le \sum_{i=1}^{m} f_i(x)|f(x)-a_i|.$$

Or, si $x \in U_i$ alors $|f_i(x)-a_i| \le \epsilon$ et si $x \notin U_i$ on a $f_i(x)=0$. Ainsi, $f_i(x)|f(x)-a_i| \le \epsilon f_i(x)$, et on obtient

$$|f(x)-g(x)| \le \epsilon \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \epsilon.$$

On a bien $\|f-g\|_\infty \le \epsilon$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Le résultat suivant affirme que les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_{\min}$ coïncident sur $\mathcal{C}(X) \otimes A$.

Proposition 2.2.1. *Soit A une C^*-algèbre unitale et K un compact Hausdorff. On a un $*-$isomorphisme*

$$\mathcal{C}(K) \otimes_{min} A \simeq \mathcal{C}(K, A).$$

Démonstration. Par densité, il suffit de démontrer que sur $\mathcal{C}(K) \otimes A$ les normes $\|.\|_{\min}$ et $\|.\|_\infty$ coïncident.
- Montrons d'abord le résultat lorsque $A = \mathcal{B}(H)$ où H est un espace de Hilbert. Pour ce faire, on va plonger isométriquement $\mathcal{C}(K, \mathcal{B}(H))$ et $\mathcal{C}(K) \otimes_{\min} \mathcal{B}(H)$ dans $\mathcal{B}\left(l^2_K(H)\right)$ et vérifier que sur $\mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{B}(H)$ ces plongements coïncident. On définit

$$\begin{array}{rccl} \pi_1 : & \mathcal{C}(K, \mathcal{B}(H)) & \longrightarrow & \mathcal{B}\left(l^2_K(H)\right) \\ & f & \longmapsto & ((h_k)_{k\in K} \mapsto (f(k)h_k)_{k \in K}) \end{array} \qquad \text{(opérateur diagonal).}$$

Alors π est une $*-$représentation isométrique unitale, ce qui définit le premier plongement.
Pour le second, on commence par remarquer que si dans le cas précédent on a $H = \mathbb{C}$, on obtient une $*-$représentation isométrique unitale

$$\pi : \mathcal{C}(K) \longrightarrow \mathcal{B}(l^2_K).$$

Définissons maintenant

$$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{B}(H) & \longrightarrow & \mathcal{B}\left(l^2_K \overset{2}{\otimes} H\right). \\ & \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes T_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \pi(f_i) \otimes_{\text{sp}} T_i \end{array}$$

ψ est linéaire et on a, par définition de la norme $\|.\|_{\min}$,

$$\left\|\psi\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes T_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \pi(f_i) \otimes T_i\right\| = \left\|\left(\pi \otimes I_{\mathcal{B}(H)}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes T_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes T_i\right\|_{\min}.$$

Ainsi, ψ s'étend en une isométrie $\mathcal{C}(K) \otimes_{\min} \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}\left(l^2_K \overset{2}{\otimes} H\right)$ et on note encore ψ le prolongement obtenu. L'application

$$\begin{array}{rccl} \phi : & l^2_K \overset{2}{\otimes} H & \longrightarrow & l^2_K(H) \\ & \sum_i (x_i(k))_{k \in K} \otimes h_i & \longmapsto & \left(\sum_i x_i(k)h_i\right)_{k\in K} \end{array}$$

est une bijection linéaire isométrique, de sorte que l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi_2 : & \mathcal{C}(K) \otimes_{\min} \mathcal{B}(H) & \longrightarrow & \mathcal{B}\left(l^2_K(H)\right) \\ & \sum_i f_i \otimes T_i & \longmapsto & \phi \circ \psi \left(\sum_i f_i \otimes T_i\right) \circ \phi^{-1} \end{array}$$

est linéaire isométrique.
Montrons que si $x \in \mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{B}(H)$, $\pi_1(x) = \pi_2(x)$. Par linéarité, il suffit de considérer le cas où $x = f \otimes T$. Par densité, on doit montrer que si $h = (h_k)_{k\in K} \in l^2_K(H)$ est à support fini, on a $\pi_1(x)h = \pi_2(x)h$.
Notons $(e_k)_{k\in K}$ la base canonique de l^2_K. On a alors $\phi^{-1}(h) = \sum_{k\in K} e_k \otimes h_k$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \pi_2(x)h = (\phi \circ \psi(f \otimes T) \circ \phi^{-1})(h) = \phi(\pi(f_i) \otimes_{\mathrm{sp}} T)\left(\sum_k e_k \otimes h_k\right) &= \phi\left(\sum_k f(k) e_k \otimes T(h_k)\right) \\ &= (f(k)T(h_k))_{k\in K} \\ &= \pi_1(f \otimes T)h, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'injection $\mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{B}(H) \hookrightarrow \mathcal{C}(K, \mathcal{B}(H))$.

- Dans le cas général, si A est une C^*-algèbre unitale, il existe un espace de Hilbert H et une $*-$représentation isométrique unitale $\pi : A \to \mathcal{B}(H)$. En appliquant ce qui précède à $\mathcal{B}(H)$ puis en restreignant à A, on obtient alors le résultat souhaité. □

Définissons maintenant la norme $\|.\|_{\max}$. Soient A, B deux C^*-algèbres unitales et $\pi_1 : A \to \mathcal{B}(H)$, $\pi_2 : B \to \mathcal{B}(H)$ deux $*-$homomorphismes dont les images commutent. On définit alors un $*-$homomorphisme $\pi : A \otimes B :\to \mathcal{B}(H)$ en posant, pour $x = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$,

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^n \pi_1(a_i)\pi_2(b_i).$$

Réciproquement, si $\pi : A \otimes B :\to \mathcal{B}(H)$ est un $*-$homomorphisme, on définit $\pi_1(a) = \pi(a \otimes 1)$ et $\pi_2(b) = \pi(1 \otimes b)$. Alors $\pi_1 : A \to \mathcal{B}(H)$ et $\pi_2 : B \to \mathcal{B}(H)$ sont deux $*-$homomorphismes dont les images commutent.
On définit, pour $x \in A \otimes B$,

$$\|x\|_{\max} = \sup\left\{\|\pi(x)\| : \pi A \otimes B :\to \mathcal{B}(H) \ \ * \text{-homomorphisme unital}\right\}.$$

Alors $\|.\|_{\max}$ définit une C^*-norme sur $A \otimes B$.

Proposition 2.2.2. *Soient A, B des C^*-algèbres unitales, $\|.\|_\gamma$ une C^*-norme sur $A \otimes B$ et $x \in A \otimes_\gamma B$. Alors $\|x\|_\gamma \leq \|x\|_{max}$.*

Démonstration. $A \otimes_\gamma B$ étant une C^*-algèbre, il existe un espace de Hilbert H et une $*-$représentation $\pi : A \otimes_\gamma B \to \mathcal{B}(H)$ isométrique. Par définition de $\|x\|_{\max}$ on a alors $\|x\|_\gamma = \|\pi(x)\| \leq \|x\|_{\max}$. □

2.2.2 C^*-algèbres nucléaires

Définition 2.2.1. *Une C^*-algèbre A est dite nucléaire lorsque pour toute C^*-algèbre unitale B, les normes $\|.\|_{min}$ et $\|.\|_{max}$ coïncident sur $A \otimes B$.*

Proposition 2.2.3. *Soit X un espace topologique compact. Alors $\mathcal{C}(X)$ est nucléaire.*

Démonstration. Par la proposition (2.2.2) on a l'inégalité $\|x\|_{\min} \le \|x\|_{\max}$.
Réciproquement, soit B une C^*-algèbre unitale, soient $\pi_1 : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{B}(H), \pi_2 : B \to \mathcal{B}(H)$ deux $*-$représentations dont les images commutent et soit π l'$*-$homomorphisme défini sur $A \otimes B$ associé à π_1 et π_2. Soit $g = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes b_i \in \mathcal{C}(X) \otimes B$. Montrons que $\|\pi(g)\| \le \|g\|_{\min}$.
Soit E la mesure spectrale associée à π_1. Si $B \in \mathrm{Bor}(X)$, $E(B)$ commute avec $\pi_2(B)$ puisque $\pi_2(B)$ commute avec $\pi_2(\mathcal{C}(X))$. Ainsi, en notant $T = \sum_{i=1}^{n} \pi_1(f_i)\pi_2(b_i)$ on a

$$\|T\| = \max\left\{\|E(B)T\|, \|E(\complement B)T\|\right\}. \tag{2.3}$$

En effet, puisque $I_H = E(B) + E(\complement B)$ et que les projections $E(B)$ et $E(\complement B)$ sont orthogonales on a

$$\begin{aligned} T = (E(B) + E(\complement B))T(E(B) + E(\complement B)) &= E(B)TE(B) + E(\complement B)TE(\complement B) + E(B)TE(\complement B) + E(\complement B)TE(B) \\ &= E(B)TE(B) + E(\complement B)TE(\complement B) + TE(B)E(\complement B) + TE(\complement B)E(B) \\ &= E(B)TE(B) + E(\complement B)TE(\complement B). \end{aligned}$$

En posant $\alpha = \max\left\{\|E(B)T\|, \|E(\complement B)T\|\right\}$ on a alors, pour tout $h \in H$,

$$\|Th\|^2 = \|E(B)TE(B)h\|^2 + \|E(\complement B)TE(\complement B)h\|^2 \le \alpha^2\|E(B)h\|^2 + \alpha^2\|E(\complement B)h\|^2 = \alpha^2\|h\|^2.$$

On en déduit que $\|T\| \le \alpha$, et puisque $E(B)$ et $E(\complement B)$ ont une norme inférieure à 1, on a $\alpha \le \|T\|$, d'où l'égalité (2.3).
Ainsi, si (U_λ) est un recouvrement ouvert fini de X, on a $\|T\| = \max\limits_{\lambda} \|E(U_\lambda)T\|$.

Soit $\epsilon > 0$ fixé. Par continuité des f_i, il existe, pour tout $x \in X$, un voisinage ouvert U_x de x tel que pour tout $y \in U_x$ et pour tout $i = 1, \dots, n$, $|f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon$. On a $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ donc par compacité de X, il existe $x_1, \dots, x_k \in X$ tels que $X = \bigcup_{j=1}^{k} U_{x_j}$. Pour $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le k$, on a $E(U_{x_j})\pi_1(f_i) = \pi_1(f_i \chi_{U_{x_j}})$, donc $\|E(U_{x_j})\pi_1(f_i) - f_i(x_j)E(U_{x_j})\| = \|(f_i - f_i(x_j))\mathbb{1}_{U_{x_j}}\|_\infty < \epsilon$.
Ainsi,

$$\left\|E(U_{x_j})\sum_{i=1}^{n}(\pi_1(f_i) - f_i(x_j))\pi_2(b_i)\right\| \le \sum_{i=1}^{n}\|E(U_{x_j})(\pi_1(f_i) - f_i(x_j))\|\|\pi_2(b_i)\| \le \epsilon\sum_{i=1}^{n}\|b_i\|$$

car un $*-$homomorphisme est contractant. $(U_{x_j})_{j=1}^{n}$ étant un recouvrement ouvert de X, on a

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{i=1}^{n}\pi_1(f_i)\pi_2(b_i)\right\| = \max_{1\le j\le k}\left\|E(U_{x_j})\sum_{i=1}^{n}\pi_1(f_i)\pi_2(b_i)\right\| &\le \max_{1\le j\le k}\left\|E(U_{x_j})\sum_{i=1}^{n}f_i(x_j)\pi_2(b_i)\right\| + \epsilon\sum_{i=1}^{n}\|b_i\| \\ &\le \max_{1\le j\le k}\left\|\sum_{i=1}^{n}f_i(x_j)b_i\right\| + \epsilon\sum_{i=1}^{n}\|b_i\| \\ &\le \sup_{x\in X}\left\|\sum_{i=1}^{n}f_i(x)b_i\right\| + \epsilon\sum_{i=1}^{n}\|b_i\|. \end{aligned}$$

Or, par la proposition (2.2.1) on a $\sup_{x\in X}\left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(x)b_i\right\| = \|g\|_{\min}$. On en déduit que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \pi_1(f_i)\pi_2(b_i)\right\| \leq \|g\|_{\min} + \epsilon\sum_{i=1}^{n}\|b_i\|.$$

En prenant la borne supérieure sur les π_1 et π_2 puis en faisant tendre ϵ vers 0, on obtient $\|g\|_{\max} \leq \|g\|_{\min}$, ce qui achève la démonstration.

□

2.2.3 Construction de la mesure spectrale jointe

Soit H un espace de Hilbert et soit $(h_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H. Posons $K = S_2(H)$. On définit les multiplications à gauche et à droite :

$$\begin{array}{rccc} \sigma_l : & \mathcal{B}(H) & \longrightarrow & \mathcal{B}(K) \\ & a & \longmapsto & (x \mapsto ax) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \sigma_r : & \mathcal{B}(H) & \longrightarrow & \mathcal{B}(K). \\ & b & \longmapsto & (x \mapsto xb) \end{array}$$

Ces applications sont linéaires et d'après la proposition (1.1.1) on a, pour tous $a, b \in \mathcal{B}(H)$ et pour tout $x \in K$,

$$\|\sigma_l(a)(x)\| = \|ax\| \leq \|a\|\|x\|_2 \;\text{ et }\; \|\sigma_r(b)(x)\| \leq \|xb\| \leq \|x\|_2\|b\|,$$

de sorte que $\|\sigma_l(a)\| \leq \|a\|$ et $\|\sigma_l(b)\| \leq \|b\|$. Ainsi, σ_l et σ_r sont contractantes.
De plus, pour tout $a \in S_2(H)$ et pour tout $x, y \in K$ on a

$$\begin{aligned}\langle\sigma_l(a^*)(x), y\rangle_{HS} = \langle a^*x, y\rangle_{HS} = \sum_{i\in I}\langle a^*x(h_i), y(h_i)\rangle = \sum_{i\in I}\langle x(h_i), ay(h_i)\rangle &= \langle x, \sigma_l(a)(y)\rangle_{HS} \\ &= \langle\sigma_l(a)^*(x), y\rangle_{HS},\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\sigma_l(a^*) = \sigma_l(a)^*$. On montre de même que σ_r préserve l'adjonction.
Enfin, pour tous $a, b \in \mathcal{B}(H)$,

$$\sigma_l(ab) = \sigma_l(a)\sigma_l(b),\; \sigma_r(ab) = \sigma_r(b)\sigma_r(b)$$

et $\sigma_l(I_H) = \sigma_r(I_H) = I_K$.
Ainsi, σ_l est un $*-$homomorphisme unital et σ_r un anti $*-$homomorphisme unital.

Soient A, B deux C^*-algèbres avec B commutative unitale. Soient $\pi_1 : A \to \mathcal{B}(H)$ et $\pi_2 : B \to \mathcal{B}(H)$ deux $*-$homomorphismes. On pose $\alpha = \sigma_l \circ \pi_1 : A \to \mathcal{B}(K)$ et $\beta = \sigma_r \circ \pi_2 : B \to \mathcal{B}(K)$. α est un $*-$homomorphisme comme composée d'$*-$homomorphismes. De plus, B étant commutative, on a pour tous $b, b' \in B$,

$$\beta(bb') = \beta(b'b) = \sigma_r(\pi_2(b')\pi_2(b)) = \sigma_r(\pi_2(b))\sigma_r(\pi_2(b')) = \beta(b)\beta(b'),$$

de sorte que β est également un $*-$homomorphisme.
Montrons que les images de α et β commutent. Soient $a \in A, b \in B$ et $x \in K$. On a

$$\alpha(a)\beta(b)(x) = \sigma_l(\pi_1(a))(\sigma_r(\pi_2(b))(x)) = \pi_1(a)x\pi_2(b)$$

$$\text{et} \quad \beta(b)\alpha(a)(x) = \sigma_r(\pi_2(b))(\sigma_l(\pi_1(a))(x)) = \sigma_l(\pi_1(a))(x)\pi_2(b) = \pi_1(a)x\pi_2(b).$$

Donc $\alpha(a)\beta(b) = \beta(b)\alpha(a)$.

L'application $(a,b) \in A \times B \mapsto \alpha(a)\beta(b)$ est bilinéaire et il existe donc une unique application linéaire $u : A \otimes B \to \mathcal{B}(K)$ telle que pour tous $a \in A, b \in B$, $u(a \otimes b) = \alpha(a)\beta(b)$. Puisque les images de α et de β commutent, u s'étend, par définition du produit tensoriel maximal, en un $*-$homomorphisme

$$\widehat{u} : A \otimes_{\max} B \to \mathcal{B}(H).$$

B étant commutative unitale, il existe un compact K_1 tel que B est $*-$isomorphe à $\mathcal{C}(K_1)$. Par les propositions (2.2.1) et (2.2.3) on a alors $A \otimes_{\max} B = A \otimes_{\min} B = \mathcal{C}(K_1, A)$. Si A est également commutative unitale, il existe un compact K_2 tel que $A \simeq \mathcal{C}(K_2)$. Puisque $\mathcal{C}(K_1, \mathcal{C}(K_2))$ et $\mathcal{C}(K_1 \times K_2)$ sont $*-$isomorphes, on en déduit une $*-$représentation

$$\widehat{u} : \mathcal{C}(K_1 \times K_2) \to \mathcal{B}(H).$$

On peut maintenant construire la mesure spectrale jointe.

Théorème 2.2.2. *Soient E_1 et E_2 deux mesures spectrales définies respectivement sur les boréliens de deux compacts K_1 et K_2 et à valeurs dans $\mathcal{B}(H)$. Alors il existe une unique mesure spectrale E définie sur les boréliens de $K_1 \times K_2$ et à valeurs dans $\mathcal{B}(S_2(H))$ telle que pour tous $A \in Bor(K_1)$, $B \in Bor(K_2)$, et pour tout $x \in S_2(H)$,*

$$E(A \times B)(x) = E_1(A)xE_2(B).$$

E est appelée mesure spectrale jointe associée à E_1 et E_2.

Démonstration. - Existence : Soient π_1 et π_2 les $*-$homomorphismes associés à E_1 et E_2, donnés par la proposition (2.1.2), et restreints respectivement à $\mathcal{C}(K_1)$ et $\mathcal{C}(K_2)$. On applique ce qui précède à π_1 et π_2, ce qui fournit un $*-$homomorphisme $\widehat{u} : \mathcal{C}(K_1 \times K_2) \to \mathcal{B}(K)$. Par le théorème (2.1.1), il existe alors une unique mesure spectrale E associée à $\widehat{u}$, définie sur les boréliens de $K_1 \times K_2$ et à valeurs dans $\mathcal{B}(K)$.
Explicitons, pour $x, y \in S_2(H)$, la mesure complexe $E_{x,y}$. Soient A un borélien de K_1 et B un borélien de K_2. Alors $\mathbb{1}_{A\times B} \in \mathcal{B}(K_1 \times K_2)$ et s'identifie dans $\mathcal{B}(K_1) \otimes \mathcal{B}(K_2)$ à $\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B$. En étendant les $*-$homomorphismes précédents grâce au calcul fonctionnel borélien on obtient alors :

$$\begin{aligned} E_{x,y}(A \times B) = \langle E(A\times B)x, y\rangle_{HS} = \langle \widehat{u}(\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B)x, y\rangle_{HS} &= \sum_{i\in I} \langle (\widehat{u}(\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B)x)(h_i), y(h_i)\rangle \\ &= \sum_{i\in I} \langle (y^*\widehat{u}(\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B)x)(h_i), h_i\rangle \\ &= tr(y^*\widehat{u}(\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B)x). \end{aligned}$$

Or, on a vu que $\widehat{u}(\chi_A \otimes \chi_B)x = \alpha(\mathbb{1}_A)\beta(\mathbb{1}_B)x = \pi_1(\mathbb{1}_A)x\pi_2(\mathbb{1}_B) = E_1(A)xE_2(B)$. On obtient alors

$$E_{x,y}(A \times B) = tr(y^* E_1(A)xE_2(B)). \tag{2.4}$$

Ceci étant valable pour tout $y \in S_2(H)$, on en déduit que

$$E(A \times B) = E_1(A)xE_2(B).$$

Ceci prouve donc l'existence.

- Unicité : l'égalité (2.4) s'écrit encore $\langle \widehat{u}(\mathbb{1}_{A\times B})x, y\rangle_{HS} = tr(y^* E_1(A)xE_2(B))$ donc par bilinéarité, on en déduit que pour toutes fonctions simples $f : K_1 \to \mathbb{C}$ et $g : K_2 \to \mathbb{C}$ on a

$$\langle \widehat{u}(f\otimes g)x, y\rangle_{HS} = tr(y^*\pi_1(f)x\pi_2(g))$$

ou encore

$$\widehat{u}(f\otimes g)x = \pi_1(f)x\pi_2(g).$$

Par approximation, la formule précédente reste alors valable lorsque $f : K_1 \to \mathbb{C}$ et $g : K_2 \to \mathbb{C}$ sont des fonctions mesurables bornées, et en particulier si f et g sont continues. Or, par le théorème de Stone-Weierstrass, l'espace vectoriel engendré par les fonctions continues sur $K_1 \times K_2$ à variables séparées est dense dans $\mathcal{C}(K_1 \times K_2)$. Ainsi, $\widehat{u}$ est déterminé de façon unique sur $\mathcal{C}(K_1 \times K_2)$ à partir de (2.4). La mesure spectrale E associée est donc unique. $\square$

Remarque : Dans la preuve ci-dessus, on a démontré en particulier que si $\widehat{u}$ est l'homomorphisme associé à la mesure spectrale jointe E, alors

$$\widehat{u}(f\otimes g)x = \pi_1(f)x\pi_2(g)$$

pour $f : K_1 \to \mathbb{C}$ et $g : K_2 \to \mathbb{C}$ mesurables bornées. Cette égalité sera utilisée dans le dernier chapitre.

CHAPITRE 3

ESPACES UMD

Dans ce chapitre, on commence par donner la définition d'un espace UMD ainsi qu'une condition suffisante pour qu'un espace ait cette propriété. Cela permettra de prouver que les espaces $S^p, 1 < p < \infty$ sont UMD. Dans une seconde section, on verra qu'on peut généraliser les théorèmes classiques de Littlewood-Paley et de Marcinkiewicz aux espaces $L^p(\mathbb{T}, X)$ où X est un espace UMD. Enfin, on donnera quelques applications de ces théorèmes qui seront utiles dans le dernier chapitre.

3.1 Définition et caractérisations

Définition 3.1.1. *Soit X un espace de Banach, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration. Une suite $(d_n)_n \subset L^1(\Omega, X)$ est une différence de martingales relativement à $(\mathcal{F}_n)_n$ si pour tout $n \geq 0$, d_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et $E[d_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 0$.*

Définition 3.1.2. *Un espace de Banach X est dit UMD s'il existe $1 < p < \infty$ et $\beta_p > 0$ tels que pour toute différence de martingales $(d_n)_n$ à valeurs dans X, pour toute suite $(\epsilon_n)_n \subset \{-1, 1\}$ et pour tout $n \geq 0$,*

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k d_k \right\|_p \leq \beta_p \left\| \sum_{k=0}^{n} d_k \right\|_p . \tag{3.1}$$

Si $(a_n)_n$ est une suite de nombres complexes alors $(a_n d_n)_n$ est également une différence de martingales, donc si X est UMD et que la série $\sum_n a_n d_n$ converge dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, elle converge inconditionnellement.

On peut démontrer que si un espace X est UMD, alors pour tout $1 < p < \infty$, il existe une constante $\beta_p > 0$ vérifiant (3.1). La preuve de ce fait est contenu dans la démonstration du théorème suivant, prouvé dans [3].

Théorème 3.1.1. *Un espace de Banach X est UMD si et seulement si il existe une fonction biconvexe $\zeta : X \times X \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\zeta(0, 0) > 0 \text{ et } \zeta(x, y) \leq \|x + y\| \text{ si } \|x\| = \|y\| = 1.$$

On s'intéresse maintenant à une autre caractérisation de la propriété UMD. Soit X un espace de Banach. Si $f = \sum_n \widehat{f}(n)e^{in\cdot}$ est un polynôme trigonométrique à valeurs dans X, on définit sa transformée de Hilbert $\mathcal{H}f$ en posant

$$\mathcal{H}(f) = \sum_n -i\mathrm{sgn}(n)\widehat{f}(n)e^{in\cdot}.$$

On dit que X a la propriété (h_p), $1 < p < \infty$, si l'application linéaire $\mathcal{H}$ est bornée sur l'ensemble des polynômes trigonométriques, muni de la norme $\|.\|_p$. Dans ce cas, $\mathcal{H}$ s'étend en un opérateur borné de $L^p(\mathbb{T}, X)$ dans lui-même. On a alors le résultat suivant :

Théorème 3.1.2. *Si X est UMD, alors pour tout $1 < p < \infty$, X a la propriété (h_p).*

On va maintenant démontrer la réciproque. Soit X un espace de Banach ayant la propriété (hp). Montrons qu'alors X est un espace UMD. On notera C la norme de la transformée de Hilbert $\mathcal{H}$.

Lemme 3.1.1. *Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Soient P un polynôme trigonométrique à valeurs dans X tel que $\widehat{P}(k) = 0$ pour $|k| \geq N$, et $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ telle que $\int_{\mathbb{T}} f = 0$. Si φ est la fonction définie pour $\psi \in \mathbb{R}$ par $\varphi(\psi) = f(\theta + N\psi)$, alors on a*

$$\mathcal{H}(P\varphi)(\psi) = P(\psi)\mathcal{H}f(\theta + N\psi).$$

Démonstration. Il existe une suite de polynômes trigonométriques (P_n) qui converge dans $L^p(\mathbb{T})$ vers f. En particulier, $\widehat{P_n}(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widehat{f}(0) = 0$ par hypothèse, donc on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \widehat{P_n}(0) = 0$. Posons alors $\varphi_n(\psi) = P_n(\theta + N\psi)$.
P s'écrit sous la forme $P = \sum_{|j|<N} x_k e^{ij\cdot}$ et par ce qui précède $P_n = \sum_{k\neq 0} y_{k,n}e^{ik\cdot}$, de sorte que

$$P\varphi_n(\psi) = \left(\sum_{|j|<N} x_j e^{ij\psi}\right)\left(\sum_{k\neq 0} y_{k,n}e^{ik(\theta+N\psi)}\right) = \sum_{|j|<N, k\neq 0} x_j y_{k,n} e^{ik\theta}e^{(j+kN)\psi}.$$

Puisque pour $|j| < N$ et $k \neq 0$ on a $\mathrm{sgn}(j + kN) = \mathrm{sgn}(kN) = \mathrm{sgn}(k)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(P\varphi_n)(\psi) &= \sum_{|j|<N, k\neq 0} -i\mathrm{sgn}(j+kN)x_j y_{k,n}e^{ik\theta}e^{(j+kN)\psi} \\
&= \sum_{|j|<N, k\neq 0} -i\mathrm{sgn}(kN)x_j y_{k,n}e^{ik\theta}e^{(j+kN)\psi} \\
&= \left(\sum_{|j|<N} x_j e^{ij\psi}\right)\left(\sum_{k\neq 0} -i\mathrm{sgn}(k)y_{k,n}e^{ik(\theta+N\psi)}\right) \\
&= P(\psi)\mathcal{H}P_n(\theta + N\psi).
\end{aligned}$$

Puisque P est borné, $P\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\varphi$ dans $L^p(\mathbb{T})$. On obtient alors le résultat en passant à la limite dans l'égalité précédente grâce la continuité de la transformée de Hilbert $\mathcal{H}$. □

Lemme 3.1.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient, pour $1 \leq k \leq n$, une fonction $\phi_k \in L^p(\mathbb{T}^k, X)$ et une fonction $\varphi_k \in L^\infty(\mathbb{T})$ telle que $\int_{\mathbb{T}} \varphi_k = 0$. On a l'inégalité*

$$\left\|\sum_{k=1}^n \phi_k(\theta_1, \ldots, \theta_k)\mathcal{H}(\varphi_k)(\theta_{k+1})\right\|_p \leq C\left\|\sum_{k=1}^n \phi_k(\theta_1, \ldots, \theta_k)\varphi_k(\theta_{k+1})\right\|_p.$$

Démonstration. Par approximation, on peut supposer que les ϕ_k sont des polynômes trigonométriques à valeurs dans X, c'est-à-dire que pour tout $k = 1, \ldots, n$, ϕ_k est de la forme

$$\phi_k = \sum_j x_{j_k} e_{j,k} \tag{3.2}$$

où $j = (j_1, \ldots, j_k) \in \mathbb{Z}^k, x_{j_k} \in X \setminus \{0\}$ et $e_{j,k}(\theta_1, \ldots, \theta_k) = e^{ij_1\theta_1} \ldots e^{ij_k\theta_k}$. Notons N_k le plus grand entier $|j| = |j_1| + \ldots + |j_k|$ où j intervient dans la somme (3.2).
Définissons alors par récurrence la suite $(n_k)_{n+1}$ en posant

$$n_1 = 0 \text{ et pour } k \geq 1, n_{k+1} = n_k N_k + 1.$$

Soit $(\theta_1, \ldots, \theta_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixé. Soit f_k la fonction définie par

$$f_k(\psi) = \phi_k(\theta_1 + n_1\psi, \ldots, \theta_k + n_k\psi)\varphi_k(\theta_{k+1} + n_{k+1}\psi).$$

Par le lemme précédent on a

$$\mathcal{H}f_k(\psi) = \phi_k(\theta_1 + n_1\psi, \ldots, \theta_k + n_k\psi)\mathcal{H}\varphi_k(\theta_{k+1} + n_{k+1}\psi).$$

En sommant cette égalité pour $k = 1, \ldots, n$ puis en intégrant sur $[0, 2\pi]$ on obtient, grâce à la propriété (Hp) de X,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} &\left\| \sum_{k=1}^n \phi_k(\theta_1 + n_1\psi, \ldots, \theta_k + n_k\psi)\mathcal{H}\varphi_k(\theta_{k+1} + n_{k+1}\psi) \right\|^p \, \mathrm{d}\psi \\ &\leq C^p \int_0^{2\pi} \left\| \sum_{k=1}^n \phi_k(\theta_1 + n_1\psi, \ldots, \theta_k + n_k\psi)\varphi_k(\theta_{k+1} + n_{k+1}\psi) \right\|^p \, \mathrm{d}\psi.\end{aligned}$$

En intégrant cette expression successivement par rapport à $\theta_1, \ldots, \theta_{n+1}$ et en utilisant l'invariance par translation de la mesure de Haar sur $\mathbb{T}^{n+1}$, on a l'inégalité souhaitée. □

Notons D l'espace $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ et ϵ_n la $n-$ème coordonnée sur cet espace. On munit D de la tribu engendrée par $\{\epsilon_n, n \in \mathbb{N}\}$ et de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. $\{\epsilon_n, n \in \mathbb{N}\}$ est donc une suite de variables aléatoires de Rademacher indépendantes sur $(D, \mathbb{P})$.
Par un argument d'approximation par des fonctions simples, on montre que dans la définition (3.1.2) il suffit de considérer le cas où les d_n sont des martingales diadiques, c'est-à-dire de la forme

$$d_n = \sum_{k=1}^n U_k(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)\epsilon_{k+1}.$$

On peut maintenant démontrer que l'espace X a la propriété UMD.

Théorème 3.1.3. *Soit pour $k \in \mathbb{N}^*$ une fonction $\Delta_k \in L^p(D, X)$ ne dépendant que des k premières variables aléatoires de Rademacher $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute suite $\alpha_k = \pm 1$,*

$$\left\| \sum_{k=1}^n \alpha_{k+1}\Delta_k(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)\epsilon_{k+1} \right\|_p \leq C^2 \left\| \sum_{k=1}^n \Delta_k(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)\epsilon_{k+1} \right\|_p.$$

Ainsi, X est une espace UMD.

Démonstration. On remplace D par $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ en remarquant que si $\eta_k(\theta) = sgn(\cos\theta_k)$ alors $(\eta_k)_k$ et $(\epsilon_k)_k$ ont même loi. En appliquant le lemme précédent avec η_k pour φ_k et Δ_k pour ϕ_k on trouve

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(\eta_1, \dots, \eta_k)\mathcal{H}(\eta_{k+1}) \right\|_p \leq C \left\| \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(\eta_1, \dots, \eta_k)\eta_{k+1} \right\|_p . \tag{3.3}$$

η_k étant paire, $\mathcal{H}(\eta_k)$ est impaire et on a donc $\eta_j(\alpha_j\theta_j) = \eta_j(\theta_j)$ et $\mathcal{H}(\eta_j)(\alpha_j\theta_j) = \alpha_j\mathcal{H}(\eta_j)(\theta_j)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}} \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k+1}\Delta_k(\eta_1(\theta_1), \dots, \eta_k(\theta_k))\mathcal{H}(\eta_{k+1})(\theta_{k+1}) \right\|^p \mathrm{d}\theta \\ &\qquad = \int_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}} \left\| \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(\eta_1(\alpha_1\theta_1), \dots, \eta_k(\alpha_k\theta_k))\mathcal{H}(\eta_{k+1})(\alpha_{k+1}\theta_{k+1}) \right\|^p \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Par invariance par translation de la mesure de Haar sur $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ on trouve donc

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k+1}\Delta_k(\eta_1, \dots, \eta_k)\mathcal{H}(\eta_{k+1}) \right\|_p = \left\| \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(\eta_1, \dots, \eta_k)\mathcal{H}(\eta_{k+1}) \right\|_p . \tag{3.4}$$

Puisque $\mathcal{H}(\mathcal{H}(\eta_k)) = -\eta_k$ on trouve grâce au lemme précédent

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k+1}\Delta_k(\eta_1, \dots, \eta_k)\eta_{k+1} \right\|_p \leq C \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k+1}\Delta_k(\eta_1, \dots, \eta_k)\mathcal{H}(\eta_{k+1}) \right\|_p . \tag{3.5}$$

On en déduit le résultat en réunissant les inégalités (3.3), (3.4) et (3.5). □

Proposition 3.1.1. *Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $1 < p < \infty$, $S_p(H)$ est UMD.*

Démonstration. Par le théorème précédent, il suffit de prouver que la transformée de Hilbert est bornée sur $L^p(\mathbb{T}, S^p(H))$. Soit $f = \sum_n \widehat{f}(n)e^{in\cdot}$ un polynôme trigonométrique à valeurs dans $S^p(H)$. Commençons par montrer que si $\widehat{f}(0) = 0$ on a la formule suivante :

$$\mathcal{H}(f)^*\mathcal{H}(h) = f^*f + \mathcal{H}(f^*\mathcal{H}(f) + \mathcal{H}(f)^*f). \tag{3.6}$$

Écrivons $f = g + h$ où $g = \sum_{n>0} \widehat{f}(n)e^{in\cdot}$. On a $\mathcal{H}(f) = i(-g + h)$ et ainsi

$$f^*f - \mathcal{H}(f)^*\mathcal{H}(f) = 2(g^*h + h^*g) \quad \text{et} \quad f^*\mathcal{H}(f) + \mathcal{H}(f)^*f = 2i(g^*h - h^*g).$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\widehat{g^*h}(n) = 0$ et $\widehat{h^*g}(-n) = 0$ on en déduit que

$$\mathcal{H}(f^*\mathcal{H}(f) + \mathcal{H}(f)^*f) = -2(g^*h + h^*g),$$

d'où la formule (3.6).

Puisque $\|\widehat{f}(0)\|_p \leq \|f\|_p$, il suffit de démontrer qu'il existe une constante $C_p > 0$ indépendante de f telle que $\|\mathcal{H}f\|_p \leq C_p\|f\|_p$ lorsque $\widehat{f}(0) = 0$. On remarque pour $p = 2$ le théorème est vérifié avec $C_2 = 1$ et si le résultat est vrai à un rang p, on a, par la formule (3.6)

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}(f)\|_{2p}^2 = \|\mathcal{H}(f)^*\mathcal{H}(f)\|_p &\leq \|f^*f\|_p + \|\mathcal{H}(f^*\mathcal{H}(f) + \mathcal{H}(f)^*f)\|_p \\
&\leq \|f\|_{2p}^2 + C_p\|f^*\mathcal{H}(f) + \mathcal{H}(f)^*f\|_p \\
&\leq \|f\|_{2p}^2 + 2C_p\|f\|_{2p}\|\mathcal{H}(f)\|_{2p}
\end{aligned}$$

et on en déduit, en résolvant une inéquation du second degré, que

$$\|\mathcal{H}(f)\|_{2p} \leq \left(C_p + \sqrt{C_p^2 + 1}\right)\|f\|_{2p}.$$

Par récurrence, le résultat est ainsi démontré lorsque $p = 2^k, k \geq 1$, et par interpolation pour tout $p \geq 2$. En remarquant que l'adjoint de $\mathcal{H}$ par rapport à $L^2(\mathbb{T}, S^2(H))$ est $-\mathcal{H}$, on en déduit que pour $1 < p < 2$, $C_p = C_q$, ce qui termine la démonstration.

□

3.2 Le théorème de Littlewood-Paley

Lemme 3.2.1. *Soit X un espace de Banach complexe. Alors pour tout $p \in [1, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $x_1, \ldots, x_n \in X$ on a*

$$\frac{2}{\pi}\left\|\sum_{k=1}^n \epsilon_k x_k\right\|_{L_X^p(D)} \leq \left\|\sum_{k=1}^n e^{i\theta_k} x_k\right\|_{L_X^p(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})} \leq 2\left\|\sum_{k=1}^n \epsilon_k x_k\right\|_{L_X^p(D)}.$$

Démonstration. - Soient $x, y \in X$. On a

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{T}} \|x + \frac{\pi}{2}e^{i\theta}y\|_X^p \ \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)^{1/p} &= \frac{1}{2}\left[\left(\int_{\mathbb{T}} \|x + \frac{\pi}{2}e^{i\theta}y\|_X^p \ \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)^{1/p} + \left(\int_{\mathbb{T}} \|x + \frac{\pi}{2}e^{-i\theta}y\|_X^p \ \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)^{1/p}\right] \\
&\geq \left(\int_{\mathbb{T}} \|(x + \frac{\pi}{2}e^{i\theta}y) + (x + \frac{\pi}{2}e^{-i\theta}y)\|_X^p \ \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)^{1/p} \quad \text{par inégalité triangulaire} \\
&= \left(\int_{\mathbb{T}} \|x + \frac{\pi}{2}\cos(\theta)y\|_X^p \ \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)^{1/p} \\
&\geq \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \|x + \frac{\pi}{2}\cos(\theta)y\|_X^p + \|x + \frac{\pi}{2}\cos(\theta)(-y)\|_X^p \ \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \|x + \frac{\pi}{2}\cos(\theta)y\|_X^p \ \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)^{1/p} \geq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \|x + \frac{\pi}{2}\cos(\theta)y\|_X \ \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} &\geq \left\|\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x + \frac{\pi}{2}\cos(\theta)y) \ \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right\|_X \\
&= \frac{1}{2}\|x + y\|_X.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\left(\int_{\mathbb{T}} \|x + \frac{\pi}{2} e^{i\theta} y\|_X^p \, \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)^{1/p} \geq \left[\frac{1}{2}(\|x+y\|_X^p + \|x-y\|_X^p)\right]^{1/p}$.

Par récurrence, on obtient que pour tout m, $\left\|x + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^m \epsilon_k x_k\right\|_{L_X^p(D)} \leq \left\|x + \sum_{k=1}^m e^{i\theta_k} x_k\right\|_{L_X^p(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})}$, ce qui montre la première inégalité.

- Si $x, y \in X$, on a $x + \cos(\theta) y = \frac{1+\cos(\theta)}{2}(x+y) + \frac{1-\cos(\theta)}{2}(x-y)$, d'où

$$\|x + \cos(\theta) y\|_X \leq \frac{1+\cos(\theta)}{2}\|x+y\|_X + \frac{1-\cos(\theta)}{2}\|x-y\|_X$$

Par croissance et convexité de la fonction $t \mapsto t^p$ on obtient alors

$$\|x + \cos(\theta) y\|_X^p \leq \frac{1+\cos(\theta)}{2}\|x+y\|_X^p + \frac{1-\cos(\theta)}{2}\|x-y\|_X^p$$

puis, en intégrant,

$$\int_{\mathbb{T}} \|x + \cos(\theta) y\|_X^p \, \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \leq \frac{1}{2}(\|x+y\|_X^p + \|x-y\|_X^p).$$

Comme pour le cas précédent, on déduit de cette égalité que

$$\left\|\sum_{k=1}^n \cos(\theta_k) x_k\right\|_{L_X^p(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})} \leq \left\|\sum_{k=1}^n \epsilon_k x_k\right\|_{L_X^p(D)}.$$

Les suites $(\cos(\theta_k))_k$ et $(\sin(\theta_k))_k$ ayant même loi, on obtient finalement

$$\left\|\sum_{k=1}^n e^{i\theta_k} x_k\right\|_{L_X^p(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})} \leq \left\|\sum_{k=1}^n \cos(\theta_k) x_k\right\|_{L_X^p(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})} + \left\|\sum_{k=1}^n \sin(\theta_k) x_k\right\|_{L_X^p(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})} \leq 2\left\|\sum_{k=1}^n \epsilon_k x_k\right\|_{L_X^p(D)}.$$

□

Lemme 3.2.2. *Il existe une constante $K_p > 0$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $f_1, \ldots, f_n \in L_X^p(\mathbb{T})$ et pour tout $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ on ait*

$$\frac{1}{K_p} \int_D \left\|\sum_{k=1}^n \epsilon_k e^{ia_k \cdot} f_k\right\|_p d\mathbb{P} \leq \int_D \left\|\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k\right\|_p d\mathbb{P} \leq K_p \int_D \left\|\sum_{k=1}^n \epsilon_k e^{ia_k \cdot} f_k\right\|_p d\mathbb{P}.$$

Démonstration. Posons $Y = L^p(\mathbb{T}, X)$. Par les inégalités de Khintchine on a, pour tous $y_1, \ldots y_n \in Y$,

$$\left\|\sum_{k=1}^n \epsilon_k y_k\right\|_{L^1(D,Y)} \overset{A_p}{\approx} \left\|\sum_{k=1}^n \epsilon_k y_k\right\|_{L^p(D,Y)}$$

où la notation $\overset{A_p}{\approx}$ désigne une double inégalité comme dans l'énoncé. Ainsi, pour $y_k = e^{ia_k \cdot} f_k$ on obtient

$$\left\|\sum_{k=1}^n \epsilon_k e^{ia_k \cdot} f_k\right\|_{L^1(D,Y)} \overset{A_p}{\approx} \left\|\sum_{k=1}^n \epsilon_k e^{ia_k \cdot} f_k\right\|_{L^p(D\times\mathbb{T},X)} \tag{3.7}$$

grâce à l'isométrie $L^p(D, L^p(\mathbb{T}, X)) = L^p(D \times \mathbb{T}, X)$.
Par le lemme précédent, on a, pour tous $y_1, \dots y_n \in Y$,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k y_k \right\|_{L^p(D,X)} \overset{2}{\approx} \left\| \sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} y_k \right\|_{L^p(\mathbb{T}^{\mathbb{N}},X)}. \tag{3.8}$$

Ainsi, d'après l'inégalité (3.7) on a

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k e^{ia_k\cdot} f_k \right\|_{L^1(D,Y)} \overset{2A_p}{\approx} \left\| \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k e^{i(\theta_k + a_k\cdot)} f_k \right\|_{L^p(\mathbb{T}^{\mathbb{N}},L^p(\mathbb{T},X))} &= \left\| \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k e^{i(\theta_k + a_k\cdot)} f_k \right\|_{L^p(\mathbb{T},L^p(\mathbb{T}^{\mathbb{N}},X))} \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k e^{i\theta_k} f_k \right\|\end{aligned}$$

par invariance par translation de la mesure de Haar sur $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$.
En appliquant (3.8) au dernier membre de l'inégalité précédente on obtient

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k e^{ia_k\cdot} f_k \right\|_{L^1(D,L^p(\mathbb{T},X))} \overset{4A_p}{\approx} \left\| \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k f_k \right\|_{L^p(D,L^p(\mathbb{T},X))}$$

et par les inégalités de Khintchine,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k e^{ia_k\cdot} f_k \right\|_{L^1(D,L^p(\mathbb{T},X))} \overset{4A_p^2}{\approx} \left\| \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k f_k \right\|_{L^1(D,L^p(\mathbb{T},X))}.$$

D'où le lemme avec $K_p = 4A_p^2$. □

Lemme 3.2.3. *Soit E un espace vectoriel et $A \subset E$ un sous-ensemble fini. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a*

$$Conv(A^n) = Conv(A)^n.$$

Démonstration. Notons $C = Conv(A^n)$ et $D = Conv(A)^n$. On a clairement $C \subset D$.
Réciproquement, on remarque que $Ext(Conv(A)) \subset A$, où Ext désigne l'ensemble des points extrémaux. De même, $Ext(D) \subset Ext(Conv(A))^n$ donc $Ext(D) \subset A^n$. Ainsi, $Conv(Ext(D)) \subset C$. A étant fini, D est compact et inclus dans un espace vectoriel de dimension finie donc par le théorème de Krein-Milman, $D = \overline{Conv}(Ext(D))$, de sorte que $D \subset \overline{C} = C$. D'où le résultat. □

Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des multiplicateurs sur $\mathbb{Z}$ correspondant aux fonctions indicatrices d'un intervalle borné. Définissons $\mathcal{M} = \{\sum_{k=1}^{n} \delta_k \lambda_k S_k : n \in \mathbb{N}^*, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1, \delta_k = \pm 1, S_k \in \mathcal{I}\}$.

Proposition 3.2.1. *Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}$. Alors pour tout $1 < p < \infty$, il existe une constante A_p telle que si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{T}, X)$ on a*

$$\int_D \left\| \sum \epsilon_k T_k(f_k) \right\|_{L^p(\mathbb{T},X)} \, d\mathbb{P} \leq A_p \int_D \left\| \sum \epsilon_k f_k \right\|_{L^p(\mathbb{T},X)} \, d\mathbb{P}.$$

Démonstration. - Commençons par démontrer le résultat dans le cas où $T_k \in \mathcal{I}$.
Si $P = \sum_{j=-N}^{N} e^{ik\cdot}x_j \in L^p(\mathbb{T}, X)$, notons $R^+(P) = \widehat{P}(0) + \frac{1}{2}(P + i\mathcal{H}(P)) = \sum_{j=0}^{N} e^{ik\cdot}x_j$ et $R^-(P) = P - R^+(P) = \sum_{j=-N}^{-1} e^{ik\cdot}x_j$. X étant un espace UMD, $\mathcal{H}$ est bornée sur $L^p(\mathbb{T}, X)$ donc R^- et R^+ le sont également.
Si S_k est le multiplicateur correspondant à l'intervalle entier $[a_k, b_k[$ on a

$$S_k(f_k) = e^{ia_k} R^+(e^{i(b_k-a_k)(.)} R^-(e^{-ib_k(.)} f_k)).$$

Notons $h_k = e^{-ib_k(.)} f_k$ et $g_k = e^{i(b_k-a_k)(.)} R^-(h_k)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\|\sum \epsilon_k T_k(f_k)\|_{L^1(D,L^p(\mathbb{T},X))} &= \|\sum \epsilon_k e^{ia_k(.)} R^+(g_k)\|_{L^1(D,L^p(\mathbb{T},X))} \\
&\leq K_p \|\sum \epsilon_k R^+(g_k)\|_{L^1(D,L^p(\mathbb{T},X))} \quad \text{par le lemme (3.2.2)} \\
&\leq K_p \|R^+\| \|\sum \epsilon_k e^{i(b_k-a_k)(.)} R^-(h_k)\|_{L^1(D,L^p(\mathbb{T},X))} \\
&\leq K_p^2 \|R^+\| \|\sum \epsilon_k R^-(h_k)\|_{L^1(D,L^p(\mathbb{T},X))} \quad \text{par le lemme (3.2.2)} \\
&\leq\leq K_p^2 \|R^+\| \|R^-\| \|\sum \epsilon_k e^{-ib_k(.)} f_k\|_{L^1(D,L^p(\mathbb{T},X))} \\
&\leq K_p^3 \|R^+\| \|R^-\| \|\sum \epsilon_k f_k\|_{L^1(D,L^p(\mathbb{T},X))} \quad \text{par le lemme (3.2.2).}
\end{aligned}$$

D'où le résultat avec $A_p = K_p^3 \|R^+\| \|R^-\|$.

- Si $T_k = \delta_k S_k$, $\delta_k = \pm 1$, $S_k \in \mathcal{I}$ on a

$$\|\sum \epsilon_k T_k(f_k)\|_{L^1(D,L^p(\mathbb{T},X))} = \|\sum \epsilon_k \delta_k S_k(f_k)\|_{L^1(D,L^p(\mathbb{T},X))} = \|\sum \epsilon_k S_k(f_k)\|_{L^1(D,L^p(\mathbb{T},X))}$$

par invariance par translation de la mesure $d\mathbb{P}$, et le lemme est donc démontré dans ce cas.

- Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et $T_1, \ldots, T_n \in Conv(\mathcal{I} \cup -\mathcal{I})$. Par le lemme (), $(T_1, \ldots, T_n) \in Conv((\mathcal{I} \cup -\mathcal{I})^n)$ donc il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ tels que $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$ et pour tout $1 \leq k \leq n$, $T_k = \sum_{j=1}^m \lambda_j S_{k,j}$ où $S_{k,j} \in \mathcal{I} \cup -\mathcal{I}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\|\sum \epsilon_k T_k(f_k)\|_{L^1(D,L^p(\mathbb{T},X))} \leq \sum_{j=1}^m \lambda_j \|\sum \epsilon_k S_{k,j}(f_k)\|_{L^1(D,L^p(\mathbb{T},X))} &\leq C_p \sum_{j=1}^m \lambda_j \|\sum \epsilon_k f_k\|_{L^1(D,L^p(\mathbb{T},X))} \\
&= C_p \|\sum \epsilon_k f_k\|_{L^1(D,L^p(\mathbb{T},X))},
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Si $S \in \mathcal{I}$ est associé à l'intervalle entier I, on identifie S avec l'élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ que définit I. On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.2.2. *Si $\alpha = (\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une suite à support fini et si $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_{j+1} - \alpha_j| \leq 1$ alors $\alpha \in \mathcal{M}$.*

Démonstration. Quitte à réindexer la suite α, on peut supposer que le support de α est inclus dans $[1, n]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, de sorte que α est un élément de $\mathbb{R}^n$. On définit

$$C = Conv\,\{\delta_k I_k : \delta_k = \pm 1, I_k \text{ intervalle d'entier de } [1, n]\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Soit $\|.\|_C$ la jauge de C. Alors $E = (\mathbb{R}^n, \|.\|_C)$ est un espace vectoriel normé et $x \in C$ si et seulement si $\|x\|_C \leq 1$. En particulier, si $y \in E^*$ on a

$$\|y\|_{E^*} = \sup_{x \in C} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} y_i \right| : J \text{ intervalle de } [1, n] \right\}.$$

Soit alors $y \in E^*$ tel que $\|y\|_{E^*} \leq 1$. On a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \left((\alpha_i - \alpha_{i+1}) \sum_{k=1}^{i} y_k \right) \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{i+1} - \alpha_i| \leq 1$$

donc $\|\alpha\|_C = \sup\limits_{\|y\|_{E^*} \leq 1} \sum_{i=1}^{n} \alpha y_i \leq 1$, ce qui prouve que $\alpha \in C$ et donc par l'identification faite avant la proposition, $\alpha \in \mathcal{M}$. $\square$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, notons Δ_k l'intervalle de $\mathbb{Z}$ définie par $[2^{k-1}, 2^k[$ si $k > 0$, $\{0\}$ si $k = 0$ et $]-2^{|k|}, -2^{|k|-1}]$ si $k < 0$. Si I est un intervalle de $\mathbb{Z}$ et $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, on note $f_I = \sum_{n \in I} \widehat{f}(n) e^{in\cdot}$. De même, si $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \lambda_k S_k \in \mathcal{M}$, on note $f_\alpha = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \lambda_k S_k(f)$.

Théorème 3.2.1. *Soit X un espace UMD. Pour $1 < p < \infty$, il existe une constante C_p telle que pour tout $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$,*

$$\int_{D'} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \epsilon_k f_{\Delta_k} \right\|_p \, d\epsilon \leq C_p \|f\|_p,$$

où $D' = \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}$ est muni de la mesure uniforme $d\epsilon$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $I^n = \left[0, \frac{2\pi}{2^n}\right[$ et pour $0 \leq j < 2^n, I_j^n = I + j\dfrac{2\pi}{2^n}$. Soit alors $\mathcal{D}_n = \sigma(I_j^n, 0 \leq j < 2^n)$ la tribu engendrée par les I_j^n. Alors $(\mathcal{D}_n)_{n \geq 1}$ est une filtration.

Soit $f \in L_X^p(\mathbb{T})$. Alors $E[f|\mathcal{D}_n]$ s'écrit

$$E[f|\mathcal{D}_n] = \frac{2^n}{2\pi} \sum_{j=0}^{2^n - 1} E(f \mathbb{1}_{I_j^n}) \mathbb{1}_{I_j^n} = \int_{\mathbb{T}} f(y) K_n(., y) \, \mathrm{d}y$$

où $K_n(x, y) = \dfrac{2^n}{2\pi} \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{1}_{I_j^n}(x) \mathbb{1}_{I_j^n}(y)$.
Pour $\theta \in \mathbb{T}$ on note $\tau_\theta f(x) = f(x - \theta)$. On a alors

$$E(\tau_\theta f|\mathcal{D}_n] = \int_{\mathbb{T}} f(y) K_n(., y + \theta) \, \mathrm{d}y.$$

X étant un espace UMD, il existe une constante c_p telle que pour tout $\epsilon \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$,

$$\left\| \sum_{j \geq 1} \epsilon_j (E[\tau_\theta f|\mathcal{D}_j] - E[f_{\tau_\theta}|\mathcal{D}_{j-1}]) \right\|_p \leq c_p \|f_{\tau_\theta}\|_p = c_p \|f\|_p.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{T}} \left\| \int_{\mathbb{T}} f(y) \sum_{n\geq 1} \epsilon_n (K_n(x+\theta, y+\theta) - K_{n-1}(x+\theta, y+\theta)) \ \frac{\mathrm{d}y}{2\pi} \right\|^p \ \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \leq c_p^p \|f\|_p.$$

Soit $M_\epsilon(x,y) = \displaystyle\int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{n\geq 1} \epsilon_n (K_n(x+\theta, y+\theta) - K_{n-1}(x+\theta, y+\theta)) \right) \ \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = M_\epsilon(x-y, 0)$.
En prenant la moyenne sur θ dans l'inégalité précédente et en utilisant l'inégalité de Jensen on obtient

$$\left\| \int_{\mathbb{T}} f(y) M_\epsilon(., y) \ \frac{\mathrm{d}y}{2\pi} \right\|_{L^p(\mathbb{T},X)} \leq c_p \|f\|_p,$$

donc si $K_\epsilon(t) = M_\epsilon(t, 0)$, l'inégalité précédente s'écrit

$$\|f * K_\epsilon\|_p \leq c_p \|f\|_p. \tag{3.9}$$

On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} K_n(t+\theta, \theta) \ \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} &= \frac{2^n}{2\pi} \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_{I_j^n}(t+\theta) \mathbb{1}_{I_j^n}(\theta) \ \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \frac{2^n}{2\pi} \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_{I^n} \left(t+\theta - j\frac{2\pi}{2^n} \right) \mathbb{1}_{I^n} \left(\theta - j\frac{2\pi}{2^n} \right) \ \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \\ &= \frac{2^{2n}}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_{I^n}(t+\theta) \mathbb{1}_{I^n}(\theta)) \ \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \\ &= \frac{2^n}{2\pi} \mathbb{1}_{I^n} * \mathbb{1}_{-I^n}(t).\end{aligned}$$

Ainsi, $\widehat{K_\epsilon}(k) = \sum_{n\geq 1} \epsilon_n \left(\frac{4^n}{2\pi} \left| \widehat{\mathbb{1}_{I^n}}(k) \right|^2 - \frac{4^{n-1}}{2\pi} \left| \widehat{\mathbb{1}_{I^{n-1}}}(k) \right|^2 \right)$.
Or, $\left| \widehat{\mathbb{1}_{[0,a]}}(k) \right|^2 = \dfrac{1}{\pi^2 k^2} \sin^2 k\frac{a}{2}$ donc

$$\widehat{K_\epsilon}(k) = \sum_{n\geq 1} \epsilon_n \frac{4^n}{2\pi^2 k^2} \left(\sin^2 k\frac{k\pi}{2^n} - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{k\pi}{2^{n-1}} \right) = \sum_{n\geq 1} \epsilon_n \frac{4^n}{2\pi^2 k^2} \sin^4 \frac{k\pi}{2^n}.$$

Ainsi, $f * K_\epsilon(\theta) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \epsilon_n f^{(n)}$ où $f^{(n)}(\theta) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \frac{4^n}{\pi^2 k^2} \sin^4 \frac{k\pi}{2^n} e^{ik\theta} \widehat{f}(k)$.
Si $(\alpha_j)_{j\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}$ on obtient, par la proposition (3.2.1) et l'inégalité (3.9),

$$\int_D \left\| \sum_{n\geq 1} \epsilon_n f_{\alpha_n}^{(n)} \right\|_{L^p(\mathbb{T},X)} d\mathbb{P} \leq A_p \int_D \left\| \sum_{n\geq 1} \epsilon_n f^{(n)} \right\|_{L^p(\mathbb{T},X)} d\mathbb{P} \leq A_p c_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T},X)}. \tag{3.10}$$

Choisissons $\alpha_1 = 0$ et pour $n \geq 2$, $\alpha_n(k) = \varphi\left(\frac{k\pi}{2^n}\right) \mathbb{1}_{[2^{n-2}, 2^{n-1}[}(k)$ où $\varphi(t) = \dfrac{t^2}{2\pi \sin^4 t}$.
Soit $B' = \max \left(\sup\limits_{[\pi/4,\pi/2]} |\varphi|, \pi \sup\limits_{[\pi/4,\pi/2]} |\varphi'| \right)$. Alors, par l'inégalité des accroissements finis,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_n(k) - \alpha_n(k+1)| \leq B' \left(1 + 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{2^{n-2} \leq j < 2^{n-1}} \frac{\pi}{2^n} \right) = \frac{9}{4} B' := B.$$

D'après la proposition (3.2.2), $\dfrac{1}{B}\alpha_n \in \mathcal{M}$ pour tout n, donc par l'inégalité (3.10) on a

$$\int_D \left\| \sum_{n\geq 1} \epsilon_n f_{\Delta_{n-1}} \right\|_{L^p(\mathbb{T},X)} d\mathbb{P} \leq A_p B c_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T},X)}.$$

Puisque $(\epsilon_n)_{n\geq 2}$ et $(\epsilon_{n-1})_{n\geq 2}$ ont même loi, on obtient, en posant $C = A_p B c_p$,

$$\int_D \left\| \sum_{n\geq 1} \epsilon_n f_{\Delta_n} \right\|_{L^p(\mathbb{T},X)} d\mathbb{P} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{T},X)}.$$

De même, en choisissant $\alpha_n(k) = \varphi\left(\frac{k\pi}{2^n}\right) \mathbb{1}_{[-2^{n-1},-2^{n-2}[}(k)$ on trouve

$$\int_D \left\| \sum_{n<0} \epsilon_n f_{\Delta_n} \right\|_{L^p(\mathbb{T},X)} d\mathbb{P} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{T},X)}.$$

Enfin, puisque $f_{\Delta_0}(\theta) = \widehat{f}(0)$ on a $\|f_{\Delta_0}\|_{L^p(\mathbb{T},X)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T},X)}$ donc par inégalité triangulaire,

$$\int_{D'} \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \epsilon_k f_{\Delta_k} \right\|_p d\epsilon \leq C_p \|f\|_p,$$

où $C_p = 2C + 1$. □

On peut démontrer que le dual d'un espace UMD est UMD et en déduire que les normes $f \mapsto \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon f_{\Delta_n}\right\|_{L^1(D',L^p(\mathbb{T},X))}$ et $\|.\|_{L^p(\mathbb{T},X)}$ sont équivalentes. On obtient alors le théorème de Littlewood-Paley :

Théorème 3.2.2. *Soit X un espace UMD. Pour $1 < p < \infty$, il existe une constante C_p telle que pour tout $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$ et pour tout $\epsilon \in \{-1,1\}^{\mathbb{Z}}$,*

$$\left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \epsilon_k f_{\Delta_k} \right\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

Comme corollaire de ce théorème, on obtient le théorème de Marcinkiewicz.

Corollaire 3.2.1. *Soit $K = (\widehat{K}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes vérifiant :*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{K}(n)| \leq C \quad et \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\Delta_n} |\widehat{K}(m) - \widehat{K}(m+1)| \leq C.$$

Alors pour tout $1 < p < \infty$, il existe une constante D (ne dépendant que de p, X et de C) telle que pour tout $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$,

$$\|f * K\|_p \leq D \|f\|_p,$$

où $f * K(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{K}(n) e^{in\theta} \widehat{f}(n)$.

Démonstration. Puisque les normes $f \mapsto \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon f_{\Delta_n}\right\|_{L^1(D',L^p(\mathbb{T},X))}$ et $\|.\|_{L^p(\mathbb{T},X)}$ sont équivalentes et que $f * K(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{K}(n)e^{in\theta}\widehat{f}(n)$, on obtient qu'il existe une constante D_1 telle que

$$\|f * K\|_p \leq D_1 \int_{D'} \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon_n \sum_{m\in\Delta_n} \widehat{K}(m)e^{im\cdot}\widehat{f}(m)\right\|_p \mathrm{d}\epsilon.$$

En appliquant la proposition (3.9) avec la suite $(\alpha_n)_n \subset \mathcal{M}$, où $\alpha_n(k) = \dfrac{1}{3C}\widehat{K}(k)\mathbb{1}_{\Delta_n}(k)$, on obtient

$$\|f * K\|_p \leq 3CD_1 \int_{D'} \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon_n \sum_{m\in\Delta_n} e^{im\cdot}\widehat{f}(m)\right\|_p \mathrm{d}\epsilon \leq 3CD_1^2\|f\|_p,$$

en utilisant à nouveau l'équivalence des normes. D'où le résultat avec $D = 3CD_1^2$. $\square$

3.3 Applications

Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{B}(H)$ une famille de projections mutuellement orthogonales et telle que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} e_k$ converge fortement vers I_H et soit $1 \leq p < \infty$. Les opérateurs qui vont intervenir dans la suite seront définis par des sommes infinies. Afin de justifier la validité de ces écritures, on devra se placer sur le sous-espace $\mathcal{D}_p$ défini par

$$\mathcal{D}_p = \{x \in S_p(H) \mid e_n x e_m = 0 \text{ pour tous } n, m \text{ sauf un nombre fini}\}$$

pour lequel les sommes seront finies puis prolonger les opérateurs à $S_p(H)$. Pour cela, on va démontrer la densité de $\mathcal{D}_p$ dans $S_p(H)$. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \sum_{|k|\leq n} e_k$. Puisque les e_k sont deux à deux orthogonaux, p_n est la projection orthogonale sur $\bigcup_{|k|\leq n} \mathrm{Im}(e_k)$. De plus, pour tout $x \in S_p(H), p_n x p_n \in \mathcal{D}_p$. On en déduit la densité de $\mathcal{D}_p$ dans $S_p(H)$ grâce à la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. *Pour tout $x \in S_p(H)$, $p_n x p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ dans $S_p(H)$.*

Démonstration. Soit $x \in S_p(H)$. Montrons d'abord que $xp_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ dans $S_p(H)$, c'est-à-dire que $xq_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ où $q_n = I_H - p_n$. Supposons dans un premier temps que x est de rang fini. x étant combinaison linéaire d'opérateurs de rang 1, on peut supposer x de rang 1. Il existe alors $h, h' \in H$ non nuls tels que $x = \overline{h} \otimes h'$. q_n étant autoadjoint, on a, pour $k \in H$:

$$xq_n(k) = \langle q_n k, h\rangle h' = \langle k, q_n h\rangle h' = \overline{q_n h} \otimes h'(k),$$

de sorte que $xq_n = \overline{q_n h} \otimes h'$. On a alors $|xq_n| = \dfrac{\|q_n h\|}{\|h'\|}\overline{h'} \otimes h'$, donc

$$\|xq_n\|_p = \||xq_n|\|_p = \frac{\|q_n y\|}{\|h'\|}\|\overline{h'} \otimes h'\|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car q_n converge fortement vers 0.

Supposons maintenant que $x \in S_p(H)$ est quelconque. Soit $\epsilon > 0$. Par densité des opérateurs de rang fini dans $S_p(H)$, il existe $y \in S_p(H)$ de rang fini tel que $\|x-y\|_p < \epsilon$. Par ce qui précède, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|yq_n\|_p < \epsilon$. Ainsi, pour $n \geq n_0$,

$$\|xq_n\|_p \leq \|(x-y)q_n\|_p + \|yq_n\|_p \leq \|x-y\|_p\|q_n\|_\infty + \|yq_n\|_p < 2\epsilon$$

car $\|q_n\|_\infty \leq 1$. Ceci prouve que $xq_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Enfin, les inégalités

$$\|x - p_nxp_n\|_p \leq \|x - xp_n\|_p + \|xp_n - p_nxp_n\|p \leq \|xq_n\|_p + \|q_nx\|_p\|p_n\|_\infty \leq \|xq_n\|_p + \|x^*q_n\|_p$$

montrent que $\|x - p_nxp_n\|_p$ tend vers 0, d'où le résultat. □

Dans les énoncés et les démonstrations qui vont suivre, on supposera donc toujours que l'on se place sur $\mathcal{D}_p(H)$ pour définir les opérateurs.

Théorème 3.3.1. *Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes telle que $\|a\|_\infty \leq 1$ et $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une fonction croissante. Si $\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{2^k\leq|n|<2^{k+1}} |a_n - a_{n-1}| \leq 1$, alors l'application linéaire*

$$Sx = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} a_{f(k)-f(j)}\ e_jxe_k, x \in S_p(H),$$

est bornée sur $S_p(H)$, $1 < p < \infty$.

Démonstration. D'après la proposition (3.1.1) et le corollaire (3.2.1), $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de Fourier sur $L^2([0,1], S_p(H))$, $1 < p < \infty$, c'est-à-dire que l'application linéaire $M : L^2([0,1], S_p(H)) \to L^2([0,1], S_p(H))$ définie par

$$Mf(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\widehat{f}(n)e^{2i\pi nt}, t \in [0,1],$$

est bornée.

Posons, pour $t \in [0,1]$, $u_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi f(k)t}e_k \in \mathcal{B}(H)$. Les e_k étant des projections mutuellement orthogonales et de somme égale à I_H, u_t est unitaire. Définissons alors, pour $x \in S_p(H)$ et $t \in [0,1]$,

$$h_x(t) = u_t^*xu_t = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi(f(k)-f(j))}e_jxe_k.$$

Soit $x \in S_p(H)$. Pour tout $t \in [0,1], \|h_x(t)\|_p = \|x\|_p$ car u_t est unitaire. On en déduit que $\|h_x\|^2_{L^2([0,1],S_p(H))} = \|x\|_p$.
On remarque de plus que pour tout $n \in \mathbb{Z}, \widehat{h_x}(n) = \sum_{f(k)-f(j)=n} e_jxe_k$, de sorte que $M(h_x) = h_{Sx}$.
Ainsi,

$$\|Sx\|_p = \|h_{Sx}\|_{L^2([0,1],S_p(H))} = \|M(h_x)\|_{L^2([0,1],S_p(H))} \leq \|M\|\|h_x\|_{L^2([0,1],S_p(H))} = \|M\|\|x\|_p,$$

ce qui prouve que S est bornée sur $S_p(H)$. □

Corollaire 3.3.1. *Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une fonction croissante. Si $x \in S_p(H)$, $1 < p < \infty$ et si*

$$x_s = \sum_{j<k} (f(k) - f(j))^{is} e_j x e_k, \, s \in \mathbb{R},$$

alors il existe une constante $C_p > 0$ telle que

$$\|x_s\|_p \leq C_p(1 + |s|)\|x\|_p.$$

Démonstration. Considérons, pour $s \in \mathbb{R}$ fixé, la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $a_n = 0$ si $n \leq 0$ et $a_n = n^{is}$ si $n > 0$. On a $\|a\|_\infty = 1$ et par l'inégalité des accroissements finis on a, pour $n \geq 1$,

$$|(n+1)^{is} - n^{is}| \leq \frac{|s|}{n}.$$

Ainsi, pour $k \geq 0$,

$$\sum_{2^k \leq n < 2^{k+1}} |(n+1)^{is} - n^{is}| \leq |s| \sum_{2^k \leq n < 2^{k+1}} \frac{1}{n} \leq |s| \frac{2^{k+1} - 2^k}{2^k} = |s|.$$

En appliquant le théorème précédent avec la suite $\dfrac{a}{1+|s|}$ on obtient alors le résultat. □

Enfin, en choisissant dans le théorème (3.3.1) $a_n = \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(n)$ et $f(k) = k$, on obtient que l'application définie pour $x \in \mathcal{D}_p$ par $Tx = \sum_{k \leq j} e_k x e_j \in S_p(H)$ est bornée. T est appelée projection triangulaire. On peut alors prolonger T à $S_p(H)$, et pour $x \in S_p(H)$, l'élément $y = Tx$ obtenu vérifie :

$$e_k y e_j = 0 \quad \text{pour} \quad k > j. \tag{3.11}$$

Un élément $y \in S_p(H)$ satisfaisant la propriété (3.11) est dit triangulaire supérieur.

L'application $L : x \in S_p(H) \mapsto T(x^*) \in S_p(H)$ est continue comme composée d'applications continues, et l'élément $y = T(x^*)$ obtenu vérifie :

$$e_k y e_j = 0 \quad \text{pour} \quad k \leq j. \tag{3.12}$$

Un élément $y \in S_p(H)$ satisfaisant la propriété (3.12) est dit triangulaire inférieur. En d'autres termes, y est triangulaire inférieur lorsque y^* est triangulaire supérieur.

CHAPITRE 4

FONCTIONS OPÉRATEURS-LIPSCHITZ SUR LES CLASSES DE SCHATTEN

Ce dernier chapitre est consacré à la démonstration du résultat principal de l'article [12]. Dans une première section, on établit divers résultats qui seront utilisés dans les sections suivantes. Dans la deuxième section on construit, grâce aux résultats établis dans le chapitre précédent, un multiplicateur de Schur sur $S_p(H)$ défini par les différences divisées d'une fonction lipschitzienne. Dans une troisième partie, on étudie l'$*-$homomorphisme correspondant à une mesure spectrale jointe, qui est une version continue de l'opérateur associé au multiplicateur de la deuxième section. Le théorème (4.3.1) est le point central de la preuve du résultat principal de [12]. Sa démonstration consiste en diverses étapes d'approximation.

4.1 Lemmes préliminaires

Lemme 4.1.1. *Il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $n \geq 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |s|^n |g(s)| \ ds < \infty$, et telle que, pour tous $\lambda, \mu > 0$ tels que $\dfrac{\lambda}{\mu} \leq 2$,*

$$\frac{\lambda}{\mu} = \int_{\mathbb{R}} g(s) \lambda^{is} \mu^{-is} \ ds.$$

Démonstration. Montrons dans un premier temps que si $f \in \mathcal{S}$ (classe de Schwartz sur $\mathbb{R}$) on a, pour $n \geq 0$, l'inégalité

$$\|\widehat{f^{(n)}}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}(\|f^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f^{(n+1)}\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{4.1}$$

Puisque $\widehat{f}'(t) = -it\widehat{f}(t)$, on a par le théorème de Plancherel,

$$\|f'\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{f}'\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |t\widehat{f}(t)|^2 \ \mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\|\widehat{f}\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{[-1,1]} |\widehat{f}(t)| \ \mathrm{d}t + \int_{|t|>1} \frac{1}{|t|}|t\widehat{f}(t)| \ \mathrm{d}t \\ &\leq \sqrt{2}\left(\int_{[-1,1]} |\widehat{f}(t)|^2 \ \mathrm{d}t\right)^{1/2} + \left(\int_{|t|>1} \frac{1}{t^2} \ \mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_{|t|>1} |t\widehat{f}(t)|^2 \ \mathrm{d}t\right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2}(\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f'\|_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

En remplaçant f par $f^{(n)}$ et en appliquant l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité (4.1).

Considérons maintenant une fonction f de classe C^∞ telle que $f(t) = e^t$ si $t \leq \ln(2)$ et $f(t) = 0$ si $t \geq \ln(2) + 1$. Cette fonction est dans $\mathcal{S}$. Posons $g = \widehat{f}$. Pour $n \geq 0$ et $t \in \mathbb{R}$ on a $\widehat{f^{(n)}}(t) = (it)^n\widehat{f}(t) = (it)^n g(t)$. Par l'inégalité (4.1) on a alors

$$\int_{\mathbb{R}} |s|^n |g(s)| \ \mathrm{d}t = \|\widehat{f^{(n)}}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}(\|f^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f^{(n+1)}\|_{L^2(\mathbb{R})}) < \infty.$$

De plus, par le théorème d'inversion, on a pour $t \leq \ln(2)$, $e^t = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(s)e^{its} \ \mathrm{d}s$. Ainsi, pour $\lambda, \mu > 0$ tels que $\dfrac{\lambda}{\mu} \leq 2$, on a, en appliquant l'égalité précédente à $t = \ln\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)$,

$$\frac{\lambda}{\mu} = \int_{\mathbb{R}} g(s)e^{is\ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} \ \mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} g(s)\lambda^{is}\mu^{-is} \ \mathrm{d}s,$$

ce qui est la relation cherchée. □

Lemme 4.1.2. *Soit $d\nu$ une mesure de Borel finie sur $\mathbb{R}^2$ et $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur $(\mathbb{R}^2, d\nu)$. Si $(G_n)_n$ est la famille des Gaussiennes dilatées, ie*

$$G_n(t) = nG(nt) \quad \textit{où} \quad G(t) = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, t \in \mathbb{R}, n \geq 0,$$

et si $\phi_n(\lambda, \mu) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} G_n(s)\phi(\lambda - s, \mu - s) \ ds$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\phi - \phi_n| \ d|\nu| = 0.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Par densité des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}^2$ dans $L^1(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}|\nu|)$, il existe $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ continue à support compact telle que $\|\phi - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}|\nu|)} < \epsilon$. Soit φ_n la fonction définie par $\varphi_n(\lambda, \mu) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} G_n(s)\varphi(\lambda - s, \mu - s) \ \mathrm{d}s$. On a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\phi - \phi_n| \ \mathrm{d}|\nu| \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\phi - \varphi| \ \mathrm{d}|\nu| + \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi - \varphi_n| \ \mathrm{d}|\nu| + \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi_n - \phi_n| \ \mathrm{d}|\nu|.$$

Majorons la dernière intégrale du membre de droite. Compte-tenu du fait que $G_n \geq 0$ et que $\int_{\mathbb{R}} G_n(s)\ \mathrm{d}s = 1$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi_n(\lambda,\mu) - \phi_n(\lambda,\mu)|\ \mathrm{d}|\nu|(\lambda,\mu) &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} G_n(s) |\varphi(\lambda - s, \mu - s) - \phi(\lambda - s, \mu - s)|\ \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}|\nu|(\lambda,\mu) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} G_n(s) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(\lambda - s, \mu - s) - \phi(\lambda - s, \mu - s)|\ \mathrm{d}|\nu|(\lambda,\mu) \right) \mathrm{d}s \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} G_n(s) \|\varphi - \phi\|_{L^1(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}|\nu|)}\ \mathrm{d}s \\ &\leq \epsilon.\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_{\mathbb{R}^2} |\phi - \phi_n|\ \mathrm{d}|\nu| \leq 2\epsilon + \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi - \varphi_n|\ \mathrm{d}|\nu|$, de sorte qu'il suffit de démontrer le lemme pour φ. Montrons qu'on a $\lim_{n\to+\infty} \|\varphi - \varphi_n\|_\infty = 0$, ce qui prouvera que $\lim_{n\to+\infty} \|\varphi - \varphi_n\|_{L^1(\mathbb{R}^2,\mathrm{d}|\nu|)} = 0$ car $\mathrm{d}|\nu|$ est finie. On a

$$\varphi_n(\lambda,\mu) - \varphi(\lambda,\mu) = \int_{\mathbb{R}} G_n(s) \varphi(\lambda - s, \mu - s)\ \mathrm{d}s - \varphi(\lambda,\mu) \int_{\mathbb{R}} G_n(s)\ \mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} \psi_n(\lambda,\mu,s)\ \mathrm{d}s$$

où $\psi_n(\lambda,\mu,s) = G_n(s)(\varphi(\lambda - s, \mu - s) - \varphi(\lambda,\mu))$. ψ étant continue à support compact, elle est uniformément continue donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}$ tel que $|s| \leq \delta$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $|\varphi(\lambda - s, \mu - s) - \varphi(\lambda,\mu)| \leq \epsilon$. Posons alors

$$I_n(\lambda,\mu) = \int_{|s|\leq\delta} \psi_n(\lambda,\mu,s)\ \mathrm{d}s \quad \text{et} \quad J_n(\lambda,\mu) = \int_{|s|>\delta} \psi_n(\lambda,\mu,s)\ \mathrm{d}s.$$

Pour estimer I_n on utilise l'uniforme continuité de φ :

$$\|I_n\|_\infty \leq \int_{|s|\leq\delta} G_n(s) \sup_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}} |\varphi(\lambda - s, \mu - s) - \varphi(\lambda,\mu)|\ \mathrm{d}s \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}} G_n(s)\ \mathrm{d}s = \epsilon.$$

Pour J_n, on remarque que $\|J_n\|_\infty \leq 2\|\varphi\|_\infty \int_{||s|>\delta} G_n(s)\ \mathrm{d}s$, et puisque $\lim_{n\to+\infty} \int_{|s|>\delta} G_n(s)\ \mathrm{d}s = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|J_n\|_\infty \leq \epsilon$. Ainsi, pour $n \geq N$ on a :

$$\|\varphi - \varphi_n\|_\infty \leq \|I_n\|_\infty + \|J_n\|_\infty \leq 2\epsilon,$$

ce qui achève la démonstration. □

Enfin, en résolvant une équation différentielle linéaire d'ordre 1, on obtient le lemme suivant :

Lemme 4.1.3. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H)$ autoadjoints. Alors pour tout $r \in \mathbb{R}$,*

$$e^{irA} - e^{irB} = ir \int_0^1 e^{ir(1-t)A}(A - B)e^{irtB}\ dt.$$

En particulier, $\|e^{irA} - e^{irB}\| \leq |r|\|A - B\|$.

4.2 Multiplicateur de Schur des différences divisées

Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{B}(H)$ une suite de projections mutuellement orthogonales telle que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} e_k$ converge fortement vers I_H. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction lipschitzienne. Pour $k, j \in \mathbb{Z}$ on pose

$$\phi_{kj} = \begin{cases} \dfrac{f(k) - f(j)}{k - j} & \text{si } k \neq j \\ 0 & \text{si } k = j \end{cases} .$$

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{D}_p$ est défini par

$$\mathcal{D}_p = \{x \in S_p(H) \mid e_n x e_m = 0 \text{ pour tous } n, m \text{ sauf un nombre fini}\} .$$

Par la proposition (3.3.1), $\mathcal{D}_p$ est dense dans $S_p(H)$ pour $1 \leq p < \infty$.

On considère l'opérateur T suivant, défini sur $\mathcal{D}_p$:

$$Tx = \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} \phi_{kj} e_k x e_j.$$

Théorème 4.2.1. *Si $\|f\|_{Lip_1} < \infty$, T est un opérateur borné sur $\mathcal{D}_p$, $1 < p < \infty$, et se prolonge donc en un opérateur borné sur $S_p(H)$.*

Démonstration. Quitte à diviser f par $\|f\|_{\mathrm{Lip}_1}$ et à remplacer f par $f - f(0)$ (ce qui ne modifie pas les $\phi_{k,j}$), on peut supposer que $\|f\|_{\mathrm{Lip}_1} \leq 1$ et que $f(0) = 0$. De même, en considérant séparément les parties réelle et imaginaire de f qui sont lipschitziennes, on peut supposer que f est à valeurs réelles.
Montrons qu'il existe une constante $C_p > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathcal{D}_p$ et pour tout $y \in \mathcal{D}_q$,

$$|tr(yTx)| \leq C_p \|x\|_p \|y\|_q. \tag{4.2}$$

En passant à la borne supérieure sur les $y \in \mathcal{D}_q$ tels que $\|y\|_{p'} \leq 1$, on aura alors $\|Tx\|_p \leq C_p \|x\|_p$, ce qui est le résultat souhaité.

Comme application du théorème (3.3.1, on a vu que la projection triangulaire est bornée sur les espaces $S_\alpha(H)$, $1 < \alpha < \infty$. On peut donc supposer que x est triangulaire supérieur et y triangulaire inférieur. Si $z \in \mathcal{B}(H)$, notons $z_{kj} = e_k z e_j$. On a alors $x_{kj} = 0$ si $k > j$ et $y_{kj} = 0$ si $k \leq j$. Puisque $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n = I_H$ on a

$$y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n y.$$

Les e_k étant des projections on a $x_{kj} = e_k x_{kj}$. On obtient alors

$$yTx = \sum_{n\in\mathbb{Z},\ k\leq j} \phi_{kj} e_n y e_k x_{kj} = \sum_{k<n,\ k\leq j} \phi_{kj} y_{nk} x_{kj}.$$

En appliquant la forme linéaire tr à cette somme finie on trouve

$$tr(yTx) = \sum_{k<n,\ k\leq j} tr(\phi_{kj} y_{nk} x_{kj}) = \sum_{k<n,\ k\leq j} tr(\phi_{kj} x_{kj} y_{nk}) = \sum_{k<j} tr(\phi_{kj} x_{kj} y_{jk}) = \sum_{k<j} tr(\phi_{kj} y_{jk} x_{kj}).$$

En vue d'appliquer le corollaire (3.3.1), montrons que l'on peut supposer $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ et f croissante. Posons $a_k = f(k) - f(k-1)$. On a, pour $k < j$,

$$\phi_{kj} = \frac{1}{j-k} \sum_{k<m\leq j} a_m.$$

On a alors

$$tr(yTx) = \frac{1}{j-k} \sum_{k<j} tr(y_{jk}x_{kj}) \sum_{k<m\leq j} a_m = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \sum_{k<m\leq j} \frac{tr(y_{jk}x_{kj})}{j-k}.$$

Posons $b_m = \sum_{k<m\leq j} \frac{tr(y_{jk}x_{kj})}{j-k}$. Notons de plus b^r_m et b^i_m les parties réelle et imaginaire de b_m. Par hypothèse, $|a_m| \leq 1$, donc par l'inégalité

$$\begin{aligned}|tr(yTx)| \leq \left|\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m b^r_m\right| + \left|\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m b^i_m\right| \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} |b^r_m| + \sum_{m\in\mathbb{Z}} |b^i_m| &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} sgn(b^r_m) b^r_m + \sum_{m\in\mathbb{Z}} sgn(b^i_m) b^i_m \\ &\leq \left|\sum_{m\in\mathbb{Z}} sgn(b^r_m) b_m\right| + \left|\sum_{m\in\mathbb{Z}} sgn(b^i_m) b_m\right|,\end{aligned}$$

il suffit démontrer (4.2) dans le cas où $a_m \in \{-1, 0, 1\}$. Dans ce cas $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ d'après l'égalité

$$f(k) = f(k) - f(0) = \sum_{1\leq m\leq k} a_m.$$

De plus, quitte à considérer la fonction la fonction $g(t) = f(t) + t$ qui est croissante (car pour $s < t$ on a $g(s) - g(t) = f(s) - f(t)) + (s - t) \leq |f(s) - f(t)| + (s - t) \leq |s - t| + (s - t) = 0$) et $2-$lipschitzienne, on peut supposer f croissante.

On suppose donc maintenant que $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, f est croissante et

$$0 \leq f(k) - f(j) \leq 2(k - j) \quad \text{pour } j \leq k \text{ entiers.}$$

D'après le lemme (4.1.1), il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $n \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} |s|^n |g(s)| \, \mathrm{d}s < \infty,$$

et pour $k < j$,

$$\phi_{kj} = \int_{\mathbb{R}} g(s)(f(j) - f(k))^{is}(j - k)^{-is} \, \mathrm{d}s. \tag{4.3}$$

Posons, pour $s \in \mathbb{R}$,

$$x_s = \sum_{k<j} (j-k)^{-is} x_{kj} \quad \text{et} \quad y_s = \sum k < j(f(j) - f(k))^{is} y_{jk}$$

On a

$$tr(y_s x_s) = \sum_{k<j} (f(j) - f(k))^{is}(j-k)^{-is} y_{jk} x_{kj},$$

donc par la formule (4.3),

$$tr(yTx) = \int_{\mathbb{R}} g(s) tr(y_s x_s) \, \mathrm{d}s.$$

Par le lemme (3.3.1), il existe $C > 0$ tel que $|tr(y_s x_s)| \leq \|y_s\|_q \|x_s\|_p \leq C(1+|s|)^2 \|x\|_p \|y\|_q$. Par la formule précédente il vient alors

$$|tr(yTx) \leq C\|x\|_p\|y\|_q \int_{\mathbb{R}} (1+|s|)^2 |g(s)| \, \mathrm{d}s \leq C_p \|x\|_p \|y\|_q,$$

où $C_p = C \displaystyle\int_{\mathbb{R}} (1+|s|)^2 |g(s)| \, \mathrm{d}s$. □

Corollaire 4.2.1. *Soit $(f_j)_j$ une autre famille de projections mutuellement orthogonales et de somme égale à I_H. Si $\|f\|_{Lip_1} < \infty$, alors l'application linéaire $\widetilde{T}$ définie sur $\mathcal{D}_p$ par*

$$\widetilde{T}x = \sum_{k,j \in \mathbb{Z}} \phi_{k,j} e_k x e_j$$

est bornée sur $S_p, 1 < p < \infty$.

Démonstration. Notons, pour $j \in \mathbb{Z}$,

$$p_j = \begin{pmatrix} e_j & 0 \\ 0 & f_j \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(H \oplus H).$$

Alors les p_j sont des projections mutuellement orthogonales et de somme égale à $I_{H \oplus H}$. Soit T_ϕ l'opérateur définie sur $S_p(H \otimes H)$ par

$$T_\phi x = \sum_{k,j \in \mathbb{Z}} \phi_{k,j} p_k x p_j.$$

Par le théorème précédent, T_ϕ est borné.
Pour $x \in S_p(H)$ on note $J(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_p(H \otimes H)$ et pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S_p(H \otimes H), K(M) = b \in S_p(H)$. Alors J et K sont continues et pour $x \in S_p(H)$ on a

$$p_k J(x) p_j = \begin{pmatrix} 0 & e_k x f_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\widetilde{T} = K \circ T_\phi \circ J$ donc $\widetilde{T}$ est borné. □

4.3 Le théorème principal

4.3.1 Opérateur intégrale double des différences divisées

Soit H un espace de Hilbert. Notons $\mathcal{B}$ la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^2$. On considère E et F des mesures spectrales définies respectivement sur les boréliens de deux compacts K_1 et K_2, à valeurs dans $\mathcal{B}(H)$. Soit S la mesure spectrale jointe associée. On étend S en une mesure spectrale G définie sur $\mathcal{B}$ en posant

$$G(\Delta) = S(\Delta \cap (K_1 \times K_2)), \Delta \in \mathcal{B}.$$

Soit π l'$*-$homomorphisme associé à G, défini sur $\mathcal{B}_\infty(\mathbb{R}^2)$. Si $\phi \in \mathcal{B}_\infty(\mathbb{R}^2)$, on notera $T_\phi = \pi(\phi)$. Ainsi, $T_\phi \in \mathcal{B}(S_2(H))$ et on a, pour $x, y \in S_2(H)$,

$$tr(y^* T_\phi(x)) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi \, \mathrm{d}G_{x,y},$$

où $G_{x,y}$ est la mesure complexe de variation totale finie définie pour $\Delta \in \mathcal{B}$ par

$$G_{x,y}(\Delta) = \langle G(\Delta)x, y\rangle_{HS}.$$

On dit que T_ϕ est borné sur $S_p(H)$ lorsque T_ϕ est borné de $S_2(H) \cap S_p(H)$ muni de $\|.\|_p$ dans $S_p(H)$, $1 \leq p \leq \infty$. Dans ce cas, on peut par densité prolonger T_ϕ à $S_p(H)$. Dans cette sous-section, on va montrer que pour une certaine classe de fonctions ϕ boréliennes bornées sur $\mathbb{R}^2$, l'opérateur T_ϕ est borné sur $S_p(H)$, $1 < p < \infty$.

En vue d'effectuer une distinction de cas dans la démonstration du résultat principal, on va définir la projection diagonale par rapport à G. Notons $\Delta = \mathbb{1}_{\{\lambda=\mu\}} \in \mathcal{B}_\infty(\mathbb{R}^2)$. Alors $T := \pi(\Delta)$ définit une projection sur $S_2(H)$. Un élément $x \in S_2(H)$ est dit diagonal (par rapport à G) si $x \in \mathrm{Im}(T)$ et non-diagonal si $x \in \ker(T)$.

Proposition 4.3.1. *T est borné de $S_2(H) \cap S_p(H)$ dans $S_p(H)$, $1 \leq p < +\infty$.*

Démonstration. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $e_{nk} = E\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right)$ et $f_{nk} = F\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right)$. Soit $x \in S_p(H) \cap S_2(H)$. Puisque $\sum_k e_{nk} = \sum_j f_{nj} = I_H$, on a

$$x = \sum_{k,j \in \mathbb{Z}} e_{nk} x f_{nj},$$

et cette somme ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls puisque $e_{nk} = f_{nj} = 0$ pour $|k|$ et $|j|$ assez grands.
Soient, pour $t \in \mathbb{R}$, $U_n(t)$ et $V_n(t)$ les éléments de $\mathcal{B}(H)$ définis par

$$T_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikt} e_{nk} \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-ijt} f_{nk}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $T_n(t)$ et $V_n(t)$ sont unitaires donc $\|T_n(t) x V_n(t)\|_p = \|x\|_p$. Or,

$$T_n(t) x V_n(t) = \sum_{k,j \in \mathbb{Z}} e^{i(k-j)t} e_{nk} x e_{nj},$$

de sorte que $\displaystyle\int_0^{2\pi} T_n(t) x V_n(t) \, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_{nk} x f_{nk}$. On en déduit que

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_{nk} x f_{nk} \right\|_p \leq \int_0^{2\pi} \|T_n(t) x V_n(t)\|_p \, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \|x\|_p. \tag{4.4}$$

Notons $E_{nk} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\times \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$ et $E_n = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} E_{nk}$. On a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e_{nk} x f_{nk} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} G(E_{nk})x = G(E_n)x.$$

On remarque que $\mathbb{1}_{E_n} \to \Delta$ simplement. Ainsi, par convergence dominée, on obtient que pour tout $y \in S_q(H) \cap S_2(H)$,

$$tr(yG(E_n)x) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{E_n} \mathrm{d}G_{x,y^*} \to \int_{\mathbb{R}^2} \Delta \mathrm{d}G_{x,y^*} = tr(yT(x)).$$

Or, par la proposition (1.3.1) et l'inégalité (4.4) on a $|tr(yG(E_n)x)| \leq \|y\|_q \|G(E_n)x\|_p \leq \|y\|_q \|x\|_p$. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ on obtient donc $|tr(yT(x))| \leq \|y\|_q \|x\|_p$. En prenant la borne supérieure sur les $y \in S_q(H) \cap S_2(H)$ tels que $\|y\|_q \leq 1$, on obtient, par la proposition (1.3.2),

$$\|T(x)\|_p \leq \|x\|_p,$$

de sorte que T est contractante sur $S_p(H) \cap S_2(H)$. □

Théorème 4.3.1. *Si $\|f\|_{Lip_1} \leq 1$, alors l'opérateur T_{ϕ_f} est borné sur $S_p(H)$, $1 < p < \infty$, où*

$$\phi_f(\lambda, \mu) = \begin{cases} \dfrac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} & si\ \lambda \neq \mu \\ 0 & si\ \lambda = \mu \end{cases}.$$

Démonstration. - On commence par remarquer si $x \in S_2(H) \cap S_p(H)$ est diagonal alors

$$T_{\phi_f}(x) = \pi(\phi_f)\pi(\mathbb{1}_{\{\lambda=\mu\}})x = \pi(\phi_f \mathbb{1}_{\{\lambda=\mu\}})x = 0.$$

Ainsi, $T_{\phi_f}(x)$ est nul pour x diagonal. Par la proposition (4.3.1), la projection diagonale est bornée sur $S_p(H)$ et il suffit donc de prouver le théorème lorsque x est non-diagonal.

- Commençons par démontrer le résultat dans le cas où f est à support compact. Soit $(G_n)_n$ la famille des Gaussiennes dilatées. Posons $f_n = G_n * f$. Pour $\lambda \neq \mu$ on a

$$\phi_{f_n}(\lambda, \mu) = \frac{f_n(\lambda) - f_n(\mu)}{\lambda - \mu} \int_{\mathbb{R}} G_n(s) \frac{f(\lambda - s) - f(\mu - s)}{(\lambda - s) - (\mu - s)} \mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} G_n(s) \phi_f(\lambda - s, \mu - s) \mathrm{d}s.$$

Ainsi, par le lemme (4.1.2), on a pour tous $x, y \in S_2(H)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\phi_{f_n} - \phi_f| \mathrm{d}|G_{x,y}| = 0.$$

Pour tous $x, y \in S_2(H)$, il vient alors

$$|tr(y^* T_{\phi_f}) - tr(y^* T_{\phi_{f_n}})| = \left| \int_{\mathbb{R}^2} \phi_f \mathrm{d}G_{x,y} - \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{f_n} \mathrm{d}G_{x,y} \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrons alors que les $T_{\phi_{f_n}}$ sont uniformément bornés, ce qui prouvera que T_{ϕ_f} est borné. En effet, si $\|T_{\phi_{f_n}}\| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ on a, pour $x \in S_p(H) \cap S_p(H)$ tel que $\|x\|_p \leq 1$,

$$\|T_{\phi_f}(x)\|_p = \sup_{\|y\|_q \leq 1} |tr(y^* T_{\phi_f}(x))| = \sup_{\|y\|_q \leq 1} \lim_{n \to +\infty} \underbrace{|tr(y^* T_{\phi_{f_n}}(x))|}_{\leq \|y\|_q \|T_{\phi_{f_n}}(x)\|_p} \leq M\|x\|_p \leq M,$$

ce qui prouve que T_{ϕ_f} est borné.

Puisque $G_n \in \mathcal{S}$ et f est à support compact, on a $f_n \in \mathcal{S}$. Ainsi, $\widehat{f_n} \in \mathcal{S}$ et on pose alors, pour $m \geq 0$ et $n \geq 1$,

$$c_{n,m} = \int_{\mathbb{R}} |s^m \widehat{f_n}(s)| \, \mathrm{d}s < \infty.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. $f_n' \in \mathcal{S}$ donc par la formule d'inversion on a, pour $\lambda \neq \mu$,

$$\begin{aligned}\phi_{f_n}(\lambda, \mu) = \frac{f_n(\lambda) - f_n(\mu)}{\lambda - \mu} = \int_0^1 f_n'((1-t)\lambda + t\mu) \, \mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f_n'}(s) e^{is((1-t)\lambda + t\mu)} \, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_n'}(s) \left(\int_0^1 e^{is((1-t)\lambda + t\mu)} \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s\end{aligned}$$

par le théorème de Fubini. Ainsi, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \phi_{f_n}(\lambda, \mu) = h_1(\lambda, \mu) - h_2(\lambda, \mu)$, où

$$h_1(\lambda, \mu) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_n'}(s) \left(\int_0^1 e^{is(1-t)\lambda} e^{ist\mu} \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s \quad \text{et} \quad h_2(\lambda, \mu) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_n'}(s) \left(\int_0^1 e^{ist\lambda} \mathbb{1}_{\{\lambda = \mu\}} \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s.$$

Notons π_1, et π_2 les $*-$homomorphismes associés aux mesures spectrales E, F. Considérons, pour $s \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$ les fonctions $u_{s,t}$ et $v_{s,t}$ définies par

$$u_{s,t}(\lambda) = e^{is(1-t)\lambda} \quad \text{et} \quad v_{s,t}(\mu) = e^{ist\mu}.$$

Notons de plus $A = \displaystyle\int_{K_1} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$ et $B = \displaystyle\int_{K_2} \mu \, \mathrm{d}F(\mu)$. On a alors

$$e^{is(1-t)A} = u_{s,t}(A) = \pi_1(u_{s,t}) \quad \text{et} \quad e^{istB} = v_{s,t}(B) = \pi_2(v_{s,t}).$$

Soit $x \in S_2(h) \cap S_p(H)$ non-diagonal fixé. Par continuité et linéarité de π on a

$$\begin{aligned}T_{h_1}(x) = \pi(h_1)(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_n'}(s) \left(\int_0^1 \pi(u_{s,t} v_{s,t})(x) \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_n'}(s) \left(\int_0^1 \pi_1(u_{s,t}) x \pi_2(v_{s,t}) \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_n'}(s) \left(\int_0^1 e^{is(1-\lambda)A} x e^{istB} \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

x étant non-diagonal, on a $\pi(\mathbb{1}_{\{\lambda=\mu\}})x = \pi(\mathbb{1}_{\{\lambda=\mu\}})\pi\left(\mathbb{1}_{\{\lambda=\mu\}^\complement}\right) x = 0$ et on en déduit que $T_{h_2}(x) = 0$. Ainsi,

$$T_{\phi_{f_n}}(x) = T_{h_1}(x) - T_{h_2}(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_n'}(s) \left(\int_0^1 e^{is(1-\lambda)A} x e^{istB} \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s. \tag{4.5}$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Posons, pour $j, k \in \mathbb{Z}$,

$$e_j = E\left(\left[\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m} \right) \cap K_1 \right) \quad \text{et} \quad f_k = F\left(\left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m} \right) \cap K_2 \right).$$

Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $K_1 \subset I$ et $K_2 \subset I$ où $I = [-N, N[$. On définit alors les mesures spectrales E_m et F_m en posant, pour Δ un borélien de I,

$$E_m(\Delta) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j/m \in \Delta}} e_j \quad \text{et} \quad F_m(\Delta) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k/m \in \Delta}} f_k.$$

Soit $T_{n,m}$ l'opérateur intégrale double associé à la fonction ϕ_{f_n} et aux mesures spectrales E_m et F_m. On vérifie que $T_{n,m}(x)$ s'écrit

$$T_{n,m}(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \phi_{f_n}\left(\frac{j}{m}, \frac{k}{m}\right) e_j x e_k = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \frac{m f_n(j/m) - m f_n(k/m)}{j-k} e_j x e_k,$$

c'est-à-dire que $T_{n,m}$ est l'opérateur définie dans la section 2, associé à la fonction $f_{n,m}(t) = m f_n(t/m)$. f étant $1-$lipschitzienne, on a, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(\lambda) - f_n(\mu)| \leq \int_{\mathbb{R}} G_n(s)|f(\lambda - s) - f(\mu - s)| \, \mathrm{d}s \leq \int_{\mathbb{R}} G_n(s)|(\lambda - s) - (\mu - s)| \, \mathrm{d}s \leq |\lambda - \mu|,$$

de sorte que f_n est $1-$lipschitzienne. Ainsi,

$$\|f_{n,m}\|_{\mathrm{Lip}_1} = \|f_n\|_{\mathrm{Lip}_1} \leq 1.$$

Par le théorème (4.2.1) , la famille d'opérateurs $(T_{n,m})_{n,m}$ est alors uniformément bornée sur $S_p(H)$.

Définissons, pour $m \geq 1$, $A_m = \displaystyle\int_I \lambda \, \mathrm{d}E_m(\lambda)$ et $B_m = \displaystyle\int_I \mu \, \mathrm{d}F_m(\mu)$.
Notons, pour $j \in \mathbb{Z}$, $I_j = \left[\dfrac{j}{m}, \dfrac{j+1}{m}\right)$. Alors $(I_j)_{j=-mN}^{mN}$ est une $\dfrac{1}{m}-$partition de $\lambda \mapsto \lambda$ sur I et $(I_j \cap K_1)_{j=-mN}^{mN}$ est une $\dfrac{1}{m}-$partition de $\lambda \mapsto \lambda$ sur K_1. Lorsque $I_j \cap K_1 = \varnothing$, on remarque que $E_m(I_j) = 0$. Soient $j_1, \ldots, j_n$ les entiers tels que $I_{j_k} \cap K_1 \neq \varnothing$. On considère alors $x_1, \ldots, x_n$ des points de $I_{j_k} \cap K_1$. Puisque pour tout $i = 1, \ldots, n$, $E_m(I_{j_i}) = E(I_{j_i} \cap K_1)$, on en déduit que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i E(I_{j_i} \cap K_1) = \sum_{i=1}^{n} x_i E_m(I_{j_i}).$$

Par la proposition (2.2) et par l'inégalité triangulaire on obtient alors

$$\|A - A_m\| \leq \left\| A - \sum_{i=1}^{n} x_i E(I_{j_i} \cap K_1) \right\| + \left\| A_m - \sum_{i=1}^{n} x_i E_m(I_{j_i}) \right\| \leq \frac{2}{m}.$$

On trouve de même $\|B - B_m\| \leq \dfrac{2}{m}$.
On remarque que

$$e^{is(1-t)A} x e^{istB} - e^{is(1-t)A_m} x e^{istB_m} = e^{is(1-t)A} x (e^{istB} - e^{istB_m}) + (e^{is(1-t)A} - e^{is(1-t)A_m}) x e^{istB_m}.$$

Ainsi, par le lemme (4.1.3) on obtient, pour tous $s \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
&\|e^{is(1-t)A}xe^{istB} - e^{is(1-t)A_m}xe^{istB_m}\|_p \\
&\qquad \leq \|e^{is(1-t)A}\|\|x\|_p\|e^{istB} - e^{istB_m}\| + \|e^{is(1-t)A}\|\|x\|_p\|e^{istB} - e^{istB_m}\| \\
&\qquad \leq \|x\|_p|st|\|B - B_m\| + \|x\|_p|st|\|B - B_m\| \leq \frac{4|s|}{m}\|x\|_p.
\end{aligned}$$

x étant non diagonal par rapport aux mesures spectrales E_m et F_m, on a d'après l'égalité (4.5)

$$T_{\phi_n}(x) - T_{n,m}(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_n'}(s) \left(\int_0^1 (e^{is(1-t)A}xe^{istB} - e^{is(1-t)A_m}xe^{istB_m}) \text{ d}t\right) \text{d}s.$$

On en déduit que

$$\|T_{\phi_n}(x) - T_{n,m}(x)\|_p \leq \frac{4}{m}\|x\|_p \int_{\mathbb{R}} |s\widehat{f_n'}(s)| \text{ d}s = \frac{4c_{n,2}}{m}\|x\|_p,$$

puisque $\widehat{f_n'}(s) = s\widehat{f}(s)$. Ainsi, $\|T_{\phi_n}(x) - T_{n,m}(x)\|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et la famille $(T_{n,m})_{n,m}$ étant uniformément bornée, on déduit que $(T_{\phi_n})_n$ est également uniformément bornée. Ceci prouve que T_ϕ est borné, ce qui achève la démonstration dans le cas où f est à support compact.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lipschitzienne. En tronquant la fonction f sur $[-n, n]$ puis en prolongeant la fonction obtenue par des fonctions affines bien choisies, on peut trouver une suite $(f_n)_n$ de fonctions $2-$lipschitziennes à support compact telle que $f_n \to f$ simplement sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, $\phi_{f_n} \to \phi_f$ simplement et alors, par convergence dominée

$$tr(y^*T_{\phi_{f_n}}(x)) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{f_n} \text{ d}G_{x,y} \to \int_{\mathbb{R}^2} \phi_f \text{ d}G_{x,y} = tr(y^*T_{\phi_f}(x)).$$

Les T_{f_n} étant uniformément bornés, on en déduit que T_ϕ est borné, d'où le théorème. $\square$

4.3.2 Démonstration du théorème

On va maintenant démontrer le théorème principal dont on rappelle l'énoncé.

Théorème 4.3.2. *Soit $1 < p < \infty$. Il existe une constante $c_p > 0$ telle que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lipschitzienne telle que $\|f\|_{Lip_1} \leq 1$ et pour tous $a, b \in S_p(H)$ autoadjoints,*

$$\|f(a) - f(b)\|_p \leq c_p\|a - b\|_p.$$

Si $a \in \mathcal{B}(H)$ est autoadjoint, on notera E^a sa mesure spectrale, donnée par le théorème (2.1.2). Si E_1 et E_2 sont deux mesures spectrales et $\varphi \in \mathcal{B}_\infty(\mathbb{R}^2)$ on notera $T_\varphi^{E_1,E_2}$ l'opérateur défini dans la sous-section précédente, associé à E_1, E_2 et φ. Lorsque $1 < p < \infty$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est lipschitzienne, $T_{\phi_f}^{E_1,E_2}$ définit un opérateur borné de $S_p(H)$ dans lui-même. On notera $T_{\phi_f,S_p(H)}^{E_1,E_2}$ cet opérateur.

Lemme 4.3.1. *Soient $a, b \in \mathcal{B}(H)$ autoadjoints. Alors pour tout $x \in S_2(H)$,*

$$T_{\phi_f}^{E^a,E^b}(ax - xb) = f(a)x - xf(b).$$

Démonstration. Notons $T = T_{\phi_f}^{E^a,E^b}$ et posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $e_n^a = \mathbb{1}_{[-n,n]}(a)$ et $e_n^b = \mathbb{1}_{[-n,n]}(b)$. Montrons qu'on a la formule

$$T(ae_n^a x e_n^b - e_n^a x b e_n^b) = f(a)e_n^a x e_n^b - e_n^a x f(b) e_n^b. \tag{4.6}$$

Définissons

$$\chi_1(\lambda,\mu) = \mathbb{1}_{[-n,n]}(\lambda),\ \chi_2(\lambda,\mu) = \mathbb{1}_{[-n,n]}(\mu)$$

et

$$\varphi_1(\lambda,\mu) = \lambda\chi_1(\lambda,\mu),\ \varphi_2(\lambda,\mu) = \mu\chi_2(\lambda,\mu).$$

Posons enfin $\psi_1 = \varphi_1\chi_2$, $\psi_2 = \varphi_2\chi_1$, $f_1(\lambda,\mu) = f(\lambda)$ et $f_2(\lambda,\mu) = f(\mu)$. On remarque qu'on a

$$\phi_f(\psi_1 - \psi_2) = f_1\chi_1\chi_2 - \chi_1 f_2\chi_2.$$

Pour $g \in \mathcal{B}_\infty(\mathbb{R}^2)$, $T_g = \pi(g)$ donc par propriété de morphisme de π on trouve

$$T_{\phi_f}(T_{\psi_1} - T_{\psi_2}) = T_{f_1\chi_1}T_{\chi_2} - T_{\chi_1}T_{f_2\chi_2}.$$

Or,

$$T_{\psi_1}(x) = \pi(\psi_1)x = \pi(\varphi_1)\pi(\chi_2)x = \pi_1(\lambda \mapsto \lambda)\pi_1(\mathbb{1}_{[-n,n]})x\pi_2(\mathbb{1}_{[-n,n]}) = ae_n^a x e_n^b$$

et de même, $T_{\psi_2}(x) = e_n^a x b e_n^b$.
Par des calculs similaires on trouve

$$T_{f_1\chi_1}T_{\chi_2}(x) = f(a)e_n^a x e_n^b \text{ et } T_{\chi_1}T_{f_2\chi_2}(x) = e_n^a x f(b)e_n^b.$$

D'où la formule (4.6).
Or, en choisissant n assez grand on a $e_n^a = e_n^b = Id$, ce qui donne l'égalité souhaitée. □

Démontrons maintenant le théorème (4.3.2).

Démonstration. Soient $a, b \in S_p(H)$ autoadjoints. Notons $T = T_{\phi_f, S_p(H)}^{E^a,E^b}$. Soit $(p_i)_i \subset \mathcal{B}(H)$ une suite généralisée de projections de rang fini qui converge fortement vers I_H. Pour tout i, $p_i \in S_2(H)$ donc par le lemme (4.3.1),

$$T(ap_i - p_i b) = f(a)p_i - p_i f(b). \tag{4.7}$$

Comme dans la démonstration de la proposition (3.3.1), on montre que $ap_i \to a$ et $p_i b \to b$ dans $S_p(H)$. Ainsi, $ap_i - p_i b \to a - b$, et T étant borné de $S_p(H)$ dans lui-même, on en déduit que

$$T(ap_i - p_i b) \overset{\|.\|_p}{\to} T(a-b).$$

Montrons que $f(a)p_i - p_i f(b) \to f(a) - f(b)$ faiblement. Soit $y \in S_q(H)$ de rang fini. y étant combinaison linéaire d'opérateurs de rang 1, on peut supposer que y est lui-même de rang 1. Alors il existe $h, k \in H$ tels que $y = \overline{h} \otimes k$ et on a

$$tr(f(a)p_i y) = tr(\overline{h} \otimes f(a)p_i(k)) = \langle f(a)p_i(k), h\rangle \to \langle f(a)(k), h\rangle = tr(f(a)y)$$

car $f(a)p_i$ converge fortement vers $f(a)$. De même, $tr(p_i f(b)y) \to tr(f(b)y)$, de sorte que

$$tr((f(a)p_i - p_i f(b))y) \to tr((f(a) - f(b))y). \tag{4.8}$$

Par l'égalité (4.7) et le théorème (4.3.1), il existe une constante $c_p > 0$ telle que

$$\|f(a)p_i - p_i f(b)\|_p = \|T(ap_i - p_i b)\|_p \leq c_p \|ap_i - p_i b\|_p \leq c_p(\|a\|_p + \|b\|_p).$$

On en déduit alors, par densité des opérateurs de rang fini dans $S_q(H)$, que la limite (4.8) est valable pour tout $y \in S_q(H)$, c'est-à-dire que $f(a)p_i - p_i f(b) \to f(a) - f(b)$ faiblement.
Mais alors, pour tout $y \in S_q(H)$,

$$|tr((f(a)p_i - p_i f(b))y)| \leq \|f(a)p_i - p_i f(b)\|_p \|y\|_q \leq c_p \|ap_i - p_i b\|_p \|y\|_q,$$

et en passant à la limite sur i on obtient

$$|tr((f(a) - f(b))y)| \leq c_p \|a - b\|_p \|y\|_q.$$

En prenant la borne supérieure sur les $y \in S_q(H)$ tels que $\|y\|_q \leq 1$ on obtient alors, par la proposition (1.3.2),

$$\|f(a) - f(b)\|_p \leq c_p \|a - b\|_p.$$

□

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est lipschitzienne, on peut normaliser f de sorte à avoir $\|f\|_{\mathrm{Lip}_1} \leq 1$. On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 4.3.3. *Soit $1 < p < \infty$. Il existe une constante $c_p > 0$ telle que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lipschitzienne et pour tous $a, b \in S_p(H)$ autoadjoints,*

$$\|f(a) - f(b)\|_p \leq c_p \|f\|_{Lip_1} \|a - b\|_p.$$

Remarque : Le théorème (4.3.2) reste vrai si l'on suppose seulement que a et b sont deux opérateurs autoadjoints (non nécessairement bornés) tels que $a - b \in S_p(H)$. Dans le cas où a et b sont bornés, il s'agit de construire une suite généralisée $(p_i)_i$ de projections qui converge fortement vers I_H et telle que $\|ap_i - p_i b\|_p \leq 1$. On démontre alors que $ap_i - p_i b \to a - b$ faiblement et on obtient le résultat en raisonnant comme dans la démonstration du théorème (4.3.2).

4.4 Contre-exemple dans le cas $p = 1$

Dans cette section, on construit un contre-exemple au théorème (4.3.2) dans le cas où $p = 1$.

Lemme 4.4.1. *Si $n \geq 1$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ tels que la matrice $[A_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée par*

$$A_{ij} = \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j}$$

vérifie $\|A\|_1 \geq K n \ln n$, où $K > 0$ est une constante indépendante de n.

Démonstration. Soit A_m la matrice définie par $(A_m)_{ij} = \dfrac{m^i - m^j}{m^i + m^j}, 1 \leq i, j \leq n$. On a

$$\lim_{m \to +\infty} (A_m)_{ij} = B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i < j \end{cases}.$$

Ainsi $\lim_{m\to+\infty} \|A_m\|_1 = \|B\|_1$. Montrons qu'il existe une constante $K_1 > 0$ telle que

$$\|B\|_1 \geq K_1 n \ln n,$$

ce qui prouvera le résultat.
Posons, pour $1 \leq k \leq n$, $\alpha_k = -e^{i\pi(2k-1)/n}$. On vérifie que $\dfrac{\alpha_k+1}{\alpha_k-1}$ est une valeur propre de B et que $(1, \alpha_1, \dots, \alpha_k^{n-1})$ en est un vecteur propre. B étant normale, on a $\sigma(|B|) = \{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|\}$. En remarquant que $\dfrac{\alpha_k+1}{\alpha_k-1} = \dfrac{1}{i}\cot\left(\dfrac{\pi(2k-1)}{2n}\right)$ on obtient alors

$$\|B\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| = \sum_{k=1}^{n} \left|\cot\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right)\right|.$$

Or, sur $]0, \pi/4]$, $\cot(x) \geq \dfrac{1}{2x}$ donc pour tout $1 \leq k \leq E\left(\dfrac{n}{4}\right)$ (où E désigne la fonction partie entière), $\cot\left(\dfrac{\pi(2k-1)}{2n}\right) \geq \dfrac{2n}{2\pi(2k-1)}$. Ainsi,

$$\|B\|_1 \geq \sum_{k=1}^{E(n/4)} \frac{2n}{2\pi(2k-1)} = \frac{n}{2\pi}\sum_{k=1}^{E(n/4)} \frac{1}{k-1/2} \geq \frac{n\ln(E(n/4))}{2\pi} \sim \frac{n\ln n}{2\pi},$$

ce qui achève la démonstration. □

Dans la suite, K désignera la constante obtenue au lemme précédent.

Lemme 4.4.2. *Si $n \geq 1$, il existe $A, B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ hermitiennes telles que*

$$[A, B] \neq 0 \text{ et } \|[|A|, B]\|_1 \geq K \ln n \|[A, B]\|_1.$$

Démonstration. Soit C la matrice donnée $C_{ij} = \dfrac{1}{\lambda_i + \lambda_j}$ où les λ_k sont ceux donnés dans le lemme précédent. Alors la matrice $[(\lambda_i + \lambda_j)C_{ij}]$ a pour valeurs propres 0 et n qui sont de multiplicités $n-1$ et 1. Il en est de même pour $|[(\lambda_i + \lambda_j)C_{i,j}]|$ car $[(\lambda_i + \lambda_j)C_{i,j}]$ est normale. Ainsi,

$$\|(\lambda_i + \lambda_j)C_{i,j}\|_1 = n. \tag{4.9}$$

Par le lemme précédent,

$$\|(\lambda_i - \lambda_j)C_{i,j}\|_1 \geq Kn\ln n. \tag{4.10}$$

Définissons $D = \operatorname{diag}(\lambda_k, 1 \leq k \leq n)$. Les égalités (4.9) et (4.10) s'écrivant alors

$$\|DC + CD\|_1 = n \text{ et } \|DC - CD\|_1 \geq Kn\ln n.$$

On pose $A = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & DC + CD \\ -(DC + CD) & 0 \end{pmatrix}$$

et puisque $|A| = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ on trouve de même

$$[|A|, B] = \begin{pmatrix} 0 & DC - CD \\ DC - CD & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\|[A, B]\|_1 = 2\|DC + CD\|_1 = 2n$ et $\|[|A|, B]\|_1 = 2\|DC - CD\|_1 \geq 2Kn \ln n$, d'où le résultat. $\square$

Théorème 4.4.1. *Si $n \geq 1$, il existe $A, C \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ hermitiennes telles que $A \neq C$ et*

$$\||A| - |C|\|_1 \geq \frac{1}{4} K \ln n \|A - C\|_1.$$

Démonstration. Soient A et B les matrices obtenues au lemme précédent. Pour $\epsilon \in \mathbb{R}$ on pose $C = e^{i\epsilon B} A e^{-i\epsilon B}$. On a

$$C - A = e^{i\epsilon B} A e^{-i\epsilon B} - A = i\epsilon[B, A] + e^{i\epsilon B} A e^{-i\epsilon B} - (A + i\epsilon[B, A]).$$

Définissons $f(t) = e^{itB} A e^{-itB}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $f(0) = A$ et $f'(0) = i[B, A]$. Par l'inégalité de Taylor-Young, on a alors $f(t) - A - it[B, A] = O(t^2)$ lorsque $t \to 0$. On en déduit que

$$\|C - A\|_1 = \|i\epsilon[B, A] + O(\epsilon^2)\|_1 \leq 2|\epsilon| \|[B, A]\|_1$$

pour ϵ assez petit.
Puisque $|C| = e^{i\epsilon B} |A| e^{-i\epsilon B}$ on trouve comme précédemment que

$$\||C| - |A|\|_1 = \|i\epsilon[B, |A|] + O(\epsilon^2)\|_1 \geq \frac{|\epsilon|}{2} \|[B, |A|]\|_1$$

pour ϵ assez petit. Par le lemme (4.4.2) on obtient finalement

$$\||C| - |A|\|_1 \geq \frac{|\epsilon|}{2} K \ln n \|[B, A]\|_1 \geq \frac{1}{4} K \ln n \|A - C\|_1.$$

$\square$

Remarques : - On peut démontrer qu'il existe une constante $K_1 > 0$ telle que pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitiennes,

$$\||A| - |C|\|_1 \leq K_1 \ln n \|A - C\|_1.$$

- Le théorème (4.3.2) est également faux si $p = \infty$, c'est-à-dire lorsqu'on remplace $S_p(H)$ par $\mathcal{B}(H)$. Un contre-exemple est construit dans [10].

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Bourgain. Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional. *Ark. mat.*, 1983.

[2] J. Bourgain. Vector-valued singular integrals and the $H^1 - BMO$ duality. *Probability Theory and Harmonic Analysis*, 1986.

[3] D. Burkholder. Martingales and singular integrals in Banach spaces. *Handbook of the geometry of Banach spaces, vol.1, W.B Johnson and J. Lindenstrauss, eds, Elsevier, Amsterdam*, 2001.

[4] J.B Conway. *A Course in Functional Analysis.* Springer-Verlag, 1990.

[5] E.B Davies. Lipschitz continuity of functions of operators in the Schatten classes. *J. Lond. Math. Soc.*, 37, 1988.

[6] Witvliet H. Sukochev F.A. De Pagter, B. Double operator integrals. *J. Funct. Anal.*, 192, 2002.

[7] J. Diestel and J.J Uhl. *Vector Measures.* American Mathematical Society, 1977.

[8] Schwartz Dunford. *Linear Operators Part I.* Interscience Publishers, 1957.

[9] Schwartz Dunford. *Linear Operators Part II.* Interscience Publishers, 1963.

[10] T. Kato. Continuity of the map $S \mapsto |S|$ for linears operators. *Proc. Japan Acad.*, 49, 1973.

[11] Vern Paulsen. *Completely Bounded Maps and Operators Algebras.* Cambridge University Press, 2002.

[12] Sukochev F. Potapov, D. Operator-Lipschitz functions in Schatten-von Neumann classes. *Acta math.,*.

[13] Sukochev F Potapov, D. Lipschitz and commutator estimates in symmetric operator spaces. *J. Operator Theory*, 59, 2008.

[14] Sukochev F Potapov, D. Unbounded Fredholm modules and double operator integrals. *J. Reine Angew. Math.*, 626, 2009.

[15] Walter Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1991.

[16] Masamichi Takesaki. *Theory of Operator Algebra I.* Springer, 2000.

[17] P. Wojtaszczyk. *Banach spaces for analysts.* Cambridge University Press, 1991.

[18] Kehe Zhu. *Operator theory in function spaces.* American Mathematical Society, 1990.