Opérateurs intégraux multiple et applications à la théorie de la perturbation

Clément Coine
Université Bourgogne - Franche-Comté

Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal, Clermont-Ferrand,
23 mai 2017

En collaboration avec Christian Le Merdy et Fedor Sukochev

- Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on note ℓ_p l'espace des suites complexes de puissance p-ème sommable.

- Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on note ℓ_p l'espace des suites complexes de puissance p-ème sommable.
- Pour tout opérateur $Q \in \mathcal{B}(\ell_p, \ell_q)$ il existe une matrice (infinie) $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ telle que $Q(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = A\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on note ℓ_p l'espace des suites complexes de puissance p-ème sommable.
- Pour tout opérateur $Q \in \mathcal{B}(\ell_p, \ell_q)$ il existe une matrice (infinie) $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ telle que $Q(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = A\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}x_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{3k}x_k \\ \vdots \end{pmatrix}$

- Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on note ℓ_p l'espace des suites complexes de puissance p-ème sommable.
- Pour tout opérateur $Q \in \mathcal{B}(\ell_p, \ell_q)$ il existe une matrice (infinie) $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ telle que $Q(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = A\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}x_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{3k}x_k \\ \vdots \end{pmatrix}$$
- A partir de maintenant, on identifie $\mathcal{B}(\ell_p, \ell_q)$ avec sa matrice correspondante.

Soit H un espace de Hilbert séparable, $T \in \mathcal{K}(H)$, où $\mathcal{K}(H)$ est l'ensemble de opérateurs compacts sur H. Alors T^*T est compact, ainsi que $|T| = \sqrt{T^*T}$.
De plus, $|T|$ est autoadjoint.

Soit H un espace de Hilbert séparable, $T \in \mathcal{K}(H)$, où $\mathcal{K}(H)$ est l'ensemble de opérateurs compacts sur H. Alors T^*T est compact, ainsi que $|T| = \sqrt{T^*T}$.
De plus, $|T|$ est autoadjoint.
Il existe une suite décroissante de nombres réels positifs $(\lambda_n(T))_n$ et une famille orthonormale $(u_n)_n \in H$ telle que

$$|T| = \sum_n \lambda_n \langle ., u_n \rangle \, u_n.$$

Soit H un espace de Hilbert séparable, $T \in \mathcal{K}(H)$, où $\mathcal{K}(H)$ est l'ensemble de opérateurs compacts sur H. Alors T^*T est compact, ainsi que $|T| = \sqrt{T^*T}$.
De plus, $|T|$ est autoadjoint.
Il existe une suite décroissante de nombres réels positifs $(\lambda_n(T))_n$ et une famille orthonormale $(u_n)_n \in H$ telle que

$$|T| = \sum_n \lambda_n \langle ., u_n \rangle \, u_n.$$

Par décomposition polaire, il existe une isométrie partielle $U \in \mathcal{B}(H)$ telle que $T = U|T|$.
En posant $v_n = U(u_n)$, on obtient une famille orthonormée $(v_n)_n$ telle que

$$T = \sum_n \lambda_n \langle ., u_n \rangle \, v_n.$$

Définition

On définit, pour $1 \leq p < \infty$,

$$S^p(H) = \{T \in \mathcal{K}(H) \mid (\lambda_n(T))_n \in \ell_p\}.$$

Si $T \in S^p(H)$, on pose $\|T\|_p = \|(\lambda_n(T))_n\|_{\ell_p}$.

Définition

On définit, pour $1 \leq p < \infty$,

$$S^p(H) = \{T \in \mathcal{K}(H) \mid (\lambda_n(T))_n \in \ell_p\}\,.$$

Si $T \in S^p(H)$, on pose $\|T\|_p = \|(\lambda_n(T))_n\|_{\ell_p}$.

Théorème

$(S^p(H), \|.\|_p)$ *est un espace de Banach.*

Définition

On définit, pour $1 \leq p < \infty$,

$$S^p(H) = \{T \in \mathcal{K}(H) \mid (\lambda_n(T))_n \in \ell_p\}\,.$$

Si $T \in S^p(H)$, on pose $\|T\|_p = \|(\lambda_n(T))_n\|_{\ell_p}$.

Théorème

$(S^p(H), \|.\|_p)$ *est un espace de Banach.*

Soit $1 \leq p \leq q < \infty$. On a

$$S^1(H) \subset S^p(H) \subset S^q(H) \subset \mathcal{B}(H).$$

Définition

On définit, pour $1 \leq p < \infty$,

$$S^p(H) = \{T \in \mathcal{K}(H) \mid (\lambda_n(T))_n \in \ell_p\}.$$

Si $T \in S^p(H)$, on pose $\|T\|_p = \|(\lambda_n(T))_n\|_{\ell_p}$.

Théorème

$(S^p(H), \|.\|_p)$ *est un espace de Banach.*

Soit $1 \leq p \leq q < \infty$. On a

$$S^1(H) \subset S^p(H) \subset S^q(H) \subset \mathcal{B}(H).$$

Les élements de $S^2(H)$ sont appelés opérateurs de Hilbert-Schmidt et les éléments de $S^1(H)$ les opérateurs à trace.

Exemple : Soit $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$ la matrice diagonale finie ou infinie de diagonale $(\lambda_n)_n$.

Exemple : Soit $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$ la matrice diagonale finie ou infinie de diagonale $(\lambda_n)_n$.

Alors

$$T \in S^p \text{ si et seulement si } (\lambda_n)_n \in \ell_p$$

et $\|T\|_p = \|(\lambda_n)_n\|_p$.

Le cas p=2 : soit $T \in \mathcal{B}(\ell_2)$ et soit $(t_{i,j})_{i,j\geq 1}$ la matrice infinie associée. Alors $T \in S^2(\ell_2)$ si et seulement si

$$\sum_{i,j\geq 1} |t_{i,j}|^2 < \infty.$$

Le cas p=2 : soit $T \in \mathcal{B}(\ell_2)$ et soit $(t_{i,j})_{i,j\geq 1}$ la matrice infinie associée. Alors $T \in S^2(\ell_2)$ si et seulement si

$$\sum_{i,j\geq 1} |t_{i,j}|^2 < \infty.$$

Soit $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de ℓ_2. Alors $T \in S^2(\ell_2)$ si et seulement si

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \| T(h_i)\|^2 < \infty.$$

- Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j}$ une famille de nombres complexes. On dit que M est un multiplicateur de Schur sur S^p (resp. sur $\mathcal{B}(\ell_p, \ell_q)$) si pour toute matrice $[a_{ij}] \in S^p$ (resp. dans $\mathcal{B}(\ell_p, \ell_q)$), le produit de Schur de M et A

$$M * A = [m_{ij} a_{ij}]$$

appartient à S^p (resp. à $\mathcal{B}(\ell_p, \ell_q)$).

- Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j}$ une famille de nombres complexes.
  On dit que M est un multiplicateur de Schur sur S^p (resp. sur $\mathcal{B}(\ell_p, \ell_q)$) si pour toute matrice $[a_{ij}] \in S^p$ (resp. dans $\mathcal{B}(\ell_p, \ell_q)$), le produit de Schur de M et A

$$M * A = [m_{ij} a_{ij}]$$

  appartient à S^p (resp. à $\mathcal{B}(\ell_p, \ell_q)$).
- Si M est un multiplicateur de Schur, alors M est bornée.

- Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j}$ une famille de nombres complexes. On dit que M est un multiplicateur de Schur sur S^p (resp. sur $\mathcal{B}(\ell_p, \ell_q)$) si pour toute matrice $[a_{ij}] \in S^p$ (resp. dans $\mathcal{B}(\ell_p, \ell_q)$), le produit de Schur de M et A

$$M * A = [m_{ij} a_{ij}]$$

appartient à S^p (resp. à $\mathcal{B}(\ell_p, \ell_q)$).

- Si M est un multiplicateur de Schur, alors M est bornée.
- Si $p = 2$, cette condition est suffisante sur S^2.

Exemple : La projection triangulaire. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & & \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Si $A = (a_{ik})$, alors $M * A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots \\ \dots & 0 & 0 & a_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

- M n'est pas un multiplicateur de Schur sur $\mathcal{B}(\ell_2)$.

- M n'est pas un multiplicateur de Schur sur $\mathcal{B}(\ell_2)$.
- En 1970, Kwapień et Pelczyński ont démontré que si $q \leq p$, M n'est pas un multiplicateur de Schur sur $\mathcal{B}(\ell_p, \ell_q)$.

- M n'est pas un multiplicateur de Schur sur $\mathcal{B}(\ell_2)$.
- En 1970, Kwapień et Pelczyński ont démontré que si $q \leq p$, M n'est pas un multiplicateur de Schur sur $\mathcal{B}(\ell_p, \ell_q)$.
- En 1976, Bennett a démontré que si $p < q$, M est un multiplicateur de Schur $\mathcal{B}(\ell_p, \ell_q)$.

Il existe une caractérisation bien connue des multiplicateurs de Schur sur $\mathcal{B}(\ell_2)$.

Théorème

Soit $M = (m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) M est un multiplicateur de Schur sur $\mathcal{B}(\ell_2)$.
(ii) Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et deux familles bornées $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ telles que

$$\forall i,j \in \mathbb{N},\ \ m_{ij} = \langle x_j, y_i \rangle .$$

Soit H un espace de Hilbert séparable.
Soit A, B des opérateurs normaux sur H (éventuellement non bornés).
Soit λ_A, λ_B des mesures spectrales à valeurs scalaires pour A et B.

Soit H un espace de Hilbert séparable.
Soit A, B des opérateurs normaux sur H (éventuellement non bornés).
Soit λ_A, λ_B des mesures spectrales à valeurs scalaires pour A et B.

Pour A, cela signifie que λ_A est une mesure finie sur $\sigma(A)$ telle que si E_A est la mesure spectrale de A, alors pour tout sous-ensemble borélien $\Delta \subset \sigma(A)$,

$$\lambda_A(\Delta) = 0 \Longleftrightarrow E_A(\Delta) = 0.$$

Soit H un espace de Hilbert séparable.
Soit A, B des opérateurs normaux sur H (éventuellement non bornés).
Soit λ_A, λ_B des mesures spectrales à valeurs scalaires pour A et B.

Pour A, cela signifie que λ_A est une mesure finie sur $\sigma(A)$ telle que si E_A est la mesure spectrale de A, alors pour tout sous-ensemble borélien $\Delta \subset \sigma(A)$,

$$\lambda_A(\Delta) = 0 \Longleftrightarrow E_A(\Delta) = 0.$$

Soit

$$\Gamma^{A,B} : L^\infty(\lambda_A) \otimes L^\infty(\lambda_B) \longrightarrow \mathcal{B}(S^2(H), S^2(H))$$

définie par

$$\Gamma^{A,B}(f \otimes g)(X) = f(A)Xg(B)$$

pour tous $f \in L^\infty(\lambda_A), g \in L^\infty(\lambda_B)$ et $X \in S^2(H)$.

Alors $\Gamma^{A,B}$ s'étend de façon unique en une isométrie w^*-continue

$$\Gamma^{A,B} : L^\infty(\lambda_A \times \lambda_B) \longrightarrow \mathcal{B}(S^2(H), S^2(H)).$$

Les opérateurs de la forme

$$\Gamma^{A,B}(\phi) : S^2(H) \longrightarrow S^2(H)$$

pour $\phi \in L^\infty(\lambda_A \times \lambda_B)$ sont appelés opérateurs intégraux double.

Alors $\Gamma^{A,B}$ s'étend de façon unique en une isométrie w^*-continue

$$\Gamma^{A,B} : L^\infty(\lambda_A \times \lambda_B) \longrightarrow \mathcal{B}(S^2(H), S^2(H)).$$

Les opérateurs de la forme

$$\Gamma^{A,B}(\phi) : S^2(H) \longrightarrow S^2(H)$$

pour $\phi \in L^\infty(\lambda_A \times \lambda_B)$ sont appelés opérateurs intégraux double.

La théorie des opérateurs intégraux double a débuté avec Birman-Solomyak, dans une série de trois articles en 1966, 1967, 1973.
De nombreux développements et applications ont été obtenus par Peller, et par Sukochev et ses co-auteurs dans les 20 dernières années.

Supposons que H est de dimension finie N. Soit

$$A = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_i \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=1}^{N} \mu_j Q_j$$

les décompositions spectrales de A et de B.
Pour A, cela signifie que $(e_1, \dots, e_N)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de A, P_i sont les projections orthogonales correspondantes sur $\mathbb{C}e_i$ et λ_i sont les valeurs propres correspondantes.

Supposons que H est de dimension finie N. Soit

$$A = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_i \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=1}^{N} \mu_j Q_j$$

les décompositions spectrales de A et de B.
Pour A, cela signifie que $(e_1, \ldots, e_N)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de A, P_i sont les projections orthogonales correspondantes sur $\mathbb{C}e_i$ et λ_i sont les valeurs propres correspondantes.
Alors, pour tout $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$,

$$[\Gamma^{A,B}(\phi)](X) = \sum_{i,j=1}^{N} \phi(\lambda_i, \mu_j) P_i X Q_j, X \in M_N.$$

Supposons que H est de dimension finie N. Soit

$$A = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_i \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=1}^{N} \mu_j Q_j$$

les décompositions spectrales de A et de B.
Pour A, cela signifie que $(e_1, \ldots, e_N)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de A, P_i sont les projections orthogonales correspondantes sur $\mathbb{C}e_i$ et λ_i sont les valeurs propres correspondantes.
Alors, pour tout $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$,

$$[\Gamma^{A,B}(\phi)](X) = \sum_{i,j=1}^{N} \phi(\lambda_i, \mu_j) P_i X Q_j, X \in M_N.$$

Ainsi, $\Gamma^{A,B}(\phi)$ se comporte comme le multiplicateur de Schur associé à la famille

$$(\phi(\lambda_i, \mu_j))_{1 \leq i,j \leq N}$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f' est bornée.
Soit $f^{[1]} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f^{[1]}(x,y) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, & \text{si } x \neq y \\ f'(x), & \text{si } x = y \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Alors $f^{[1]}$ est continue et bornée.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f' est bornée.
Soit $f^{[1]} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f^{[1]}(x,y) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, & \text{si } x \neq y \\ f'(x), & \text{si } x = y \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Alors $f^{[1]}$ est continue et bornée.
Soit A, D des opérateurs autoadjoints avec $D \in S^2(H)$. Alors

$$[\Gamma^{A+D,A}(f^{[1]})](D) = f(A+D) - f(A).$$

C'est comme si l'on avait

$$\Gamma^{A+D,A}(f^{[1]}) = \frac{f(A+D) - f(A)}{(A+D) - A}.$$

Soit A, B autoadjoints sur H.
Si f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et $B \in S^p(H)$, a-t-on

$$f(A+B) - f(A) \in S^p(H)?$$

Soit A, B autoadjoints sur H.
Si f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et $B \in S^p(H)$, a-t-on

$$f(A+B) - f(A) \in S^p(H)?$$

- **Faux si p=1 :** Contre-exemple par Farforovskaya (1972).

Soit A, B autoadjoints sur H.
Si f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et $B \in S^p(H)$, a-t-on

$$f(A+B) - f(A) \in S^p(H)?$$

- **Faux si p=1 :** Contre-exemple par Farforovskaya (1972).
- **Si p=1**, V. Peller a démontré que le résultat est vrai lorsque f appartient à certaines classes de fonctions (1985).

Soit A, B autoadjoints sur H.
Si f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et $B \in S^p(H)$, a-t-on

$$f(A+B) - f(A) \in S^p(H)?$$

- **Faux si p=1 :** Contre-exemple par Farforovskaya (1972).
- **Si p=1**, V. Peller a démontré que le résultat est vrai lorsque f appartient à certaines classes de fonctions (1985).

Théorème (D. Potapov, F. Sukochev, 2011)

Soit $1 < p < \infty$. Il existe une constante $c_p > 0$ telle que pour toute fonction lipschitzienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et pour tous A, B auto-adjoints avec $B \in S_p(H)$,

$$\|f(A+B) - f(A)\|_p \leq c_p \|f\|_{Lip_1} \|B\|_p.$$

Soit A, B des opérateurs normaux sur un espace de Hilbert séparable H.
Soit $S^1(H)$ l'espace des opérateurs à trace sur H.

Théorème (Peller's Theorem)

Pour tout $\phi \in L^\infty(\lambda_A \times \lambda_B)$, les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\Gamma^{A,B}(\phi)$ se restreint en une application bornée $S^1(H) \to S^1(H)$.
(ii) Il existe un espace de Hilbert K et deux fonctions $a \in L^\infty(\lambda_A; K)$ et $b \in L^\infty(\lambda_B; K)$ telles que, pour presque tous (s, t),

$$\phi(s,t) = \langle a(s), b(t) \rangle .$$

Dans ce cas, $\|\Gamma^{A,B}(\phi) : S^1(H) \to S^1(H)\| = \inf \|a\| \|b\|$.

- Une famille $M = \{m_{ikj}\}_{i,k,j\geq 1}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ est appelée multiplicateur de Schur bilinéaire dans S^p si l'action suivante

$$T_M(A, B) := \sum_{i,j,k\geq 1} m_{ikj} a_{ik} b_{kj} E_{ij},$$

$A = \{a_{ij}\}_{i,j\geq 1}, B = \{b_{ij}\}_{i,j\geq 1} \in \mathcal{S}^2$, définit une application bilinéaire bornée de $S^2 \times S^2$ dans $S^p(\ell^2)$.

- Une famille $M = \{m_{ikj}\}_{i,k,j\geq 1}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ est appelée multiplicateur de Schur bilinéaire dans S^p si l'action suivante

$$T_M(A, B) := \sum_{i,j,k\geq 1} m_{ikj} a_{ik} b_{kj} E_{ij},$$

  $A = \{a_{ij}\}_{i,j\geq 1}, B = \{b_{ij}\}_{i,j\geq 1} \in \mathcal{S}^2$, définit une application bilinéaire bornée de $S^2 \times S^2$ dans $S^p(\ell^2)$.

- Si M est un multiplicateur de Schur bilinéaire alors M est bornée.

- Une famille $M = \{m_{ikj}\}_{i,k,j\geq 1}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ est appelée multiplicateur de Schur bilinéaire dans S^p si l'action suivante

$$T_M(A, B) := \sum_{i,j,k\geq 1} m_{ikj} a_{ik} b_{kj} E_{ij},$$

  $A = \{a_{ij}\}_{i,j\geq 1}, B = \{b_{ij}\}_{i,j\geq 1} \in \mathcal{S}^2$, définit une application bilinéaire bornée de $S^2 \times S^2$ dans $S^p(\ell^2)$.

- Si M est un multiplicateur de Schur bilinéaire alors M est bornée.

- Si $p = 2$, alors cette condition est suffisante sur S^2.

Soit H un espace de Hilbert séparable.
Soit A, B, C trois opérateurs normaux sur H.
Soit $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$ des mesures spectrales à valeurs scalaires A, B, C.
On note $S^2 = S^2(H)$ et soit $\mathcal{B}_2(S^2 \times S^2, S^2)$ l'espace des applications bilinéaires bornées de $S^2 \times S^2$ dans S^2.

Soit H un espace de Hilbert séparable.
Soit A, B, C trois opérateurs normaux sur H.
Soit $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$ des mesures spectrales à valeurs scalaires A, B, C.
On note $S^2 = S^2(H)$ et soit $\mathcal{B}_2(S^2 \times S^2, S^2)$ l'espace des applications bilinéaires bornées de $S^2 \times S^2$ dans S^2.
Soit

$$\Gamma^{A,B,C} : L^\infty(\lambda_A) \otimes L^\infty(\lambda_B) \otimes L^\infty(\lambda_C) \longrightarrow \mathcal{B}_2(S^2 \times S^2, S^2)$$

définie par

$$\left[\Gamma^{A,B,C}(f \otimes g \otimes h)\right](X, Y) = f(A)Xg(B)Yh(C).$$

pour tous $f \in L^\infty(\lambda_A), g \in L^\infty(\lambda_B), h \in L^\infty(\lambda_C)$ et $X, Y \in S^2(H)$.

Théorème

$\Gamma^{A,B,C}$ *s'étend de façon unique en une isométrie* w^*-*continue*

$$\Gamma^{A,B,C} : L^\infty(\lambda_A \times \lambda_B \times \lambda_C) \longrightarrow \mathcal{B}_2(S^2 \times S^2, S^2).$$

De telles constructions ont également été données par Pavlov (1969).

Théorème

$\Gamma^{A,B,C}$ *s'étend de façon unique en une isométrie w^*-continue*

$$\Gamma^{A,B,C} : L^\infty(\lambda_A \times \lambda_B \times \lambda_C) \longrightarrow \mathcal{B}_2(S^2 \times S^2, S^2).$$

De telles constructions ont également été données par Pavlov (1969).
Les opérateurs de la forme

$$\Gamma^{A,B,C}(\phi) : S^2 \times S^2 \longrightarrow S^2$$

pour $\phi \in L^\infty(\lambda_A \times \lambda_B \times \lambda_C)$ sont appelés **opérateurs intégraux triple**.

D'autres définitions des opérateurs intégraux multiple apparaissent dans d'importants articles de Peller et de Potapov, Skripka, Sukochev.

Soit A, B, C des opérateurs normaux sur H, et soit $N = \dim(H)$. Soit

$$A = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_i \quad \text{and}, B = \sum_{k=1}^{N} \mu_k Q_k \quad \text{and} \quad C = \sum_{j=1}^{N} \nu_j R_j$$

leurs décompositions spectrales.

Soit A, B, C des opérateurs normaux sur H, et soit $N = \dim(H)$. Soit

$$A = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_i \quad \text{and}, B = \sum_{k=1}^{N} \mu_k Q_k \quad \text{and} \quad C = \sum_{j=1}^{N} \nu_j R_j$$

leurs décompositions spectrales.

Proposition

Pour tout $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ et pour toutes matrices X et Y,

$$[\Gamma^{A,B,C}(\phi)](X, Y) = \sum_{i,j,k=1}^{N} \phi(\lambda_i, \mu_k, \nu_j) P_i X Q_k Y R_j, X \in M_N.$$

Soit A, B, C des opérateurs normaux sur H, et soit $N = \dim(H)$. Soit

$$A = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_i \quad \text{and}, B = \sum_{k=1}^{N} \mu_k Q_k \quad \text{and} \quad C = \sum_{j=1}^{N} \nu_j R_j$$

leurs décompositions spectrales.

Proposition

Pour tout $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ et pour toutes matrices X et Y,

$$[\Gamma^{A,B,C}(\phi)](X,Y) = \sum_{i,j,k=1}^{N} \phi(\lambda_i, \mu_k, \nu_j) P_i X Q_k Y R_j, X \in M_N.$$

Cela montre que $\Gamma^{A,B,C}(\phi)$ se comporte comme un multiplicateur de Schur bilinéaire associé à la famille

$$(\phi(\lambda_i, \mu_k, \nu_j))_{1 \leq i,k,j \leq N}.$$

Quelles sont les fonctions ϕ pour lesquelles $\Gamma^{A,B,C}(\phi)$ définit une application de $S^2 \times S^2$ dans S^1 ?

Théorème (C., Le Merdy, Potapov, Sukochev, Tomskova)

Soit $M = \{m_{ikj}\}_{1 \leq i,k,j \leq N}$ une famille de nombres complexes. On considère la multiplication de Schur bilinéaire

$$T_M : S_N^2 \times S_N^2 \to S_N^1.$$

Théorème (C., Le Merdy, Potapov, Sukochev, Tomskova)

Soit $M = \{m_{ikj}\}_{1\leq i,k,j\leq N}$ une famille de nombres complexes. On considère la multiplication de Schur bilinéaire

$$T_M : S^2_N \times S^2_N \to S^1_N.$$

Alors $\|T_M\| < 1$ si et seulement si il existe un Hilbert K et deux familles $\{a_{ik}\}_{1\leq i,k\leq N}$ and $\{b_{jk}\}_{1\leq j,k\leq N}$ d'éléments de K telles que

$$m_{ikj} = \langle a_{ik}, b_{jk} \rangle \,, \quad i,k,j \geq 1$$

et

$$\|a_{ik}\| < 1 \quad \text{et} \quad \|b_{jk}\| < 1, \quad i,k,j \geq 1.$$

Soit A, B, C des opérateurs normaux sur un espace de Hilbert séparable H.

Théorème principal

Pour tout $\phi \in L^\infty(\lambda_A \times \lambda_B \times \lambda_C)$*, les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\Gamma^{A,B,C}(\phi)$ *est une application bilinéaire bornée*

$$S^2(H) \times S^2(H) \to S^1(H).$$

Soit A, B, C des opérateurs normaux sur un espace de Hilbert séparable H.

Théorème principal

Pour tout $\phi \in L^\infty(\lambda_A \times \lambda_B \times \lambda_C)$, les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\Gamma^{A,B,C}(\phi)$ est une application bilinéaire bornée

$$S^2(H) \times S^2(H) \to S^1(H).$$

(ii) Il existe un espace de Hilbert K et deux fonctions

$$a \in L^\infty(\lambda_A \times \lambda_B; K) \quad \textit{et} \quad b \in L^\infty(\lambda_B \times \lambda_C; K)$$

telles que

$$\phi(r, s, t) = \langle a(r, s), b(s, t) \rangle \quad \textit{pour presque tous } (r, s, t).$$

Soit A, B, C des opérateurs normaux sur un espace de Hilbert séparable H.

Théorème principal

Pour tout $\phi \in L^\infty(\lambda_A \times \lambda_B \times \lambda_C)$, les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\Gamma^{A,B,C}(\phi)$ est une application bilinéaire bornée

$$S^2(H) \times S^2(H) \to S^1(H).$$

(ii) Il existe un espace de Hilbert K et deux fonctions

$$a \in L^\infty(\lambda_A \times \lambda_B; K) \;\; \text{et} \;\; b \in L^\infty(\lambda_B \times \lambda_C; K)$$

telles que

$$\phi(r,s,t) = \langle a(r,s), b(s,t)\rangle \quad \text{pour presque tous } (r,s,t).$$

Dans ce cas, $\|\Gamma^{A,B,C}(\phi) : S^2(H) \times S^2(H) \to S^1(H)\| = \inf \|a\| \|b\|.$

• Étant donnés E, F deux espaces de Banach, soit $\Gamma_2(E, F)$ l'espace des opérateurs $T : E \to F$ qui se factorisent par un espace de Hilbert, i.e. il existe un espace de Hilbert K and deux opérateurs $\alpha : E \to K$ et $\beta : K \to F$ tels que $T = \beta\alpha$.
C'est un espace de Banach pour la norme

$$\gamma_2(T) = \inf \|\alpha\|\|\beta\|.$$

Quand F est un espace dual, $\Gamma_2(E, F)$ l'est également.

• Étant donnés E, F deux espaces de Banach, soit $\Gamma_2(E,F)$ l'espace des opérateurs $T : E \to F$ qui se factorisent par un espace de Hilbert, i.e. il existe un espace de Hilbert K and deux opérateurs $\alpha : E \to K$ et $\beta : K \to F$ tels que $T = \beta\alpha$.
C'est un espace de Banach pour la norme

$$\gamma_2(T) = \inf \|\alpha\|\|\beta\|.$$

Quand F est un espace dual, $\Gamma_2(E,F)$ l'est également.

• Soit (Σ, λ) un espace mesuré σ-fini et soit G un espace de Banach séparable. Soit $L^\infty_\sigma(\lambda; G^*)$ l'espace des fonctions $\psi : \Sigma \to G^*$ essentiellement bornées et w^*-mesurables, et posons

$$\|\psi\| = \mathrm{supess}_{s\in S}\|\psi(s)\|$$

pour de telles fonctions. En prenant le quotient par les fonctions nulles presque partout, on obtient un espace de Banach et on a

$$L^\infty_\sigma(\lambda, G^*) = L^1(\lambda; G)^*.$$

Théorème (Théorème de factorisation)

Soit (Σ, λ) un espace mesuré σ-fini, soit E, F des espaces de Banach séparables. Soit $\psi \in L^\infty_\sigma(\lambda, \Gamma_2(E, F^*))$. Alors il existe un espace de Hilbert K, et deux fonctions

$$a \in L^\infty_\sigma(\lambda; \mathcal{B}(E, K)) \quad et \quad b \in L^\infty_\sigma(\lambda; \mathcal{B}(F, K))$$

telles que $\|a\| \|b\| \leq \|\psi\|$ et pour tous $e \in E$ et $f \in F$,

$$\langle [\psi(s)](e), f \rangle = \langle [a(s)](e), [b(s)](f) \rangle$$

presque partout.

On regarde $\phi \in L^\infty(\lambda_A \times \lambda_B \times \lambda_C)$ comme un élément de $L^\infty_\sigma(\lambda_B; L^\infty(\lambda_A \times \lambda_C))$ et on associe

$$\psi \in L^\infty_\sigma(\lambda_B; \mathcal{B}(L^1(\lambda_A); L^\infty(\lambda_C)))$$

en posant

$$[\psi(s)](f) = \int_{\sigma(A)} \phi(r, s, \cdot) f(r) \, \mathrm{d}\lambda_A(r)$$

pour tout $f \in L^1(\lambda_A)$.

On regarde $\phi \in L^\infty(\lambda_A \times \lambda_B \times \lambda_C)$ comme un élément de $L^\infty_\sigma(\lambda_B; L^\infty(\lambda_A \times \lambda_C))$ et on associe

$$\psi \in L^\infty_\sigma(\lambda_B; \mathcal{B}(L^1(\lambda_A); L^\infty(\lambda_C)))$$

en posant

$$[\psi(s)](f) = \int_{\sigma(A)} \phi(r, s, \cdot) f(r) \, \mathrm{d}\lambda_A(r)$$

pour tout $f \in L^1(\lambda_A)$.

Théorème principal (Seconde formulation)

Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\Gamma^{A,B,C}(\phi)$ définit une application bilinéaire bornée $S_2(H) \times S_2(H) \to S_1(H)$.
(ii) La fonction ψ associée à ϕ appartient à

$$L^\infty_\sigma(\lambda_B; \Gamma_2(L^1(\lambda_A); L^\infty(\lambda_C))).$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f'' est bornée.
Soit $f^{[2]} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f^{[2]}(x,y,z) := \begin{cases} \frac{f^{[1]}(x,y)-f^{[1]}(y,z)}{x-z}, & \text{if } x \neq z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} f^{[1]}(x,y), & \text{if } x = z \end{cases}.$$

Alors $f^{[2]}$ est une fonction continue bornée

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f'' est bornée.
Soit $f^{[2]} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f^{[2]}(x, y, z) := \begin{cases} \frac{f^{[1]}(x,y) - f^{[1]}(y,z)}{x-z}, & \text{if } x \neq z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} f^{[1]}(x, y), & \text{if } x = z \end{cases}.$$

Alors $f^{[2]}$ est une fonction continue bornée

Soient A, D des opérateurs autoadjoints avec $D \in S^2(H)$. On suppose que A est bornée, de sorte que l'on peut définir

$$f(A + D) - f(A) \;\text{ et }\; \frac{d}{dt}(f(A + tD))_{|t=0}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f'' est bornée. Soit $f^{[2]} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f^{[2]}(x, y, z) := \begin{cases} \frac{f^{[1]}(x,y)-f^{[1]}(y,z)}{x-z}, & \text{if } x \neq z \\ \frac{\partial}{\partial x} f^{[1]}(x, y), & \text{if } x = z \end{cases}.$$

Alors $f^{[2]}$ est une fonction continue bornée

Soient A, D des opérateurs autoadjoints avec $D \in S^2(H)$. On suppose que A est bornée, de sorte que l'on peut définir

$$f(A + D) - f(A) \;\text{ et }\; \frac{d}{dt}(f(A + tD))_{|t=0}.$$

Proposition

$$f(A + D) - f(A) - \frac{d}{dt}(f(A + tD))_{|t=0} = [\Gamma^{A+D,A,A}(f^{[2]})](D, D).$$

Merci pour votre attention !