Régularité des fonctions d'opérateurs

Clément Coine
LMNO, Université de Caen Normandie

12ème journée de la Fédération Normandie-Mathématiques

6 novembre 2020

Certains résultats sont le fruit d'une collaboration avec :

- Christian Le Merdy (LMB, Besançon)
- Anna Skripka (Université du Nouveau-Mexique)
- Fedor Sukochev (UNSW Sidney)

Question générale :
Étant donné un opérateur $A : X \to X$ sur un espace de Banach X (dans la suite, $X =$ Hilbert) et f une fonction définie sur $\Omega \supset \sigma(A)$, comment définir

$$f(A) \text{ ?}$$

Quelles sont les propriétés de l'application

$$A \mapsto f(A) \text{ ?}$$

(e.g. continuité, différentiabilité...)

Objets en jeu :

• *Calcul fonctionnel* : en général, on définit $f(A)$ pour f "gentille" (par exemple f polynomiale) puis on étend par densité grâce à des inégalités du type

$$\|f(A)\| \leq C \sup_{t\in\Omega} |f(t)|,$$

Objets en jeu :

• *Calcul fonctionnel* : en général, on définit $f(A)$ pour f "gentille" (par exemple f polynomiale) puis on étend par densité grâce à des inégalités du type

$$\|f(A)\| \leq C \sup_{t \in \Omega} |f(t)|,$$

puis par continuité, on entend des inégalités du type

$$\|f(A) - f(B)\| \leq K \|f\| \|A - B\|.$$

Objets en jeu :

• *Calcul fonctionnel* : en général, on définit $f(A)$ pour f "gentille" (par exemple f polynomiale) puis on étend par densité grâce à des inégalités du type

$$\|f(A)\| \leq C \sup_{t\in\Omega} |f(t)|,$$

puis par continuité, on entend des inégalités du type

$$\|f(A) - f(B)\| \leq K\|f\|\|A - B\|.$$

$\hookrightarrow$ On se place dans le cas où $X = \mathcal{H}$ est un espace de Hilbert (séparable). On peut alors définir, pour f mesurable bornée sur $\sigma(A)$ avec A opérateur normal (A commute avec son adjoint A^*), un opérateur $f(A)$:

$$\int_{\sigma(A)} f(x)\, \mathrm{d}E^A(x).$$

• *Multiplicateurs de Schur* : Applications linéaires définie sur un espace de matrices, du type

$$[a_{ij}] \mapsto [m_{ij} a_{ij}] = [m_{ij}] \circ [a_{ij}]$$

pour une famille $[m_{ij}]$ fixée.

Applications en analyse harmonique, théorie de la perturbation...

• *Multiplicateurs de Schur* : Applications linéaires définie sur un espace de matrices, du type

$$[a_{ij}] \mapsto [m_{ij} a_{ij}] = [m_{ij}] \circ [a_{ij}]$$

pour une famille $[m_{ij}]$ fixée.

Applications en analyse harmonique, théorie de la perturbation...

• *Multiplicateurs de Schur multilinéaires* : applications bilinéaires (ou n-linéaires)

$$([a_{ij}], [b_{ij}]) \mapsto [\sum_j m_{ijk} a_{ij} b_{jk}]_{i,k}$$

• *Multiplicateurs de Schur* : Applications linéaires définie sur un espace de matrices, du type

$$[a_{ij}] \mapsto [m_{ij} a_{ij}] = [m_{ij}] \circ [a_{ij}]$$

pour une famille $[m_{ij}]$ fixée.

Applications en analyse harmonique, théorie de la perturbation...

• *Multiplicateurs de Schur multilinéaires* : applications bilinéaires (ou n-linéaires)

$$([a_{ij}], [b_{ij}]) \mapsto [\sum_j m_{ijk} a_{ij} b_{jk}]_{i,k}$$

• *Opérateurs intégraux multiples* : généralisation "continue" des multiplicateurs de Schur (multilinéaires).

Objet central en *analyse non-commutative*.

Quelle norme choisir pour les opérateurs ?

• $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ensemble des opérateurs continus de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$) muni de la norme d'opérateurs

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Quelle norme choisir pour les opérateurs ?

• $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ensemble des opérateurs continus de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$) muni de la norme d'opérateurs

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

• Soit $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs compacts sur $\mathcal{H}$. On définit, pour $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{S}^p(\mathcal{H}) = \left\{ T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \mid \|T\|_p = \mathrm{tr}(|T|^p)^{1/p} < \infty \right\}.$

Quelle norme choisir pour les opérateurs ?

• $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ensemble des opérateurs continus de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$) muni de la norme d'opérateurs

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

• Soit $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs compacts sur $\mathcal{H}$. On définit, pour $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{S}^p(\mathcal{H}) = \left\{ T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \mid \|T\|_p = \mathrm{tr}(|T|^p)^{1/p} < \infty \right\}$.

$$T \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \left(\sum_n \lambda_n(T)^p \right)^{1/p} < +\infty,$$

où les $\lambda_n(T)$ sont les valeurs singulières de T.

Quelle norme choisir pour les opérateurs ?

• $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ensemble des opérateurs continus de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$) muni de la norme d'opérateurs

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

• Soit $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs compacts sur $\mathcal{H}$. On définit, pour $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{S}^p(\mathcal{H}) = \left\{ T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \mid \|T\|_p = \mathrm{tr}(|T|^p)^{1/p} < \infty \right\}$.

$$T \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \left(\sum_n \lambda_n(T)^p \right)^{1/p} < +\infty,$$

où les $\lambda_n(T)$ sont les valeurs singulières de T.
Alors $(\mathcal{S}^p(\mathcal{H}), \|.\|_p)$ est un espace de Banach : c'est la classe de Schatten d'ordre p, aussi appelé parfois espace ℓ_p non-commutatif.
Cas particulier d'espace L_p non-commutatif.

Fonctions d'opérateurs

Soient $N \in \mathbb{N}, A = A^*, B = B^* \in M_N(\mathbb{C})$. Alors

$$A = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_k \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=1}^{N} \mu_j Q_j$$

où les λ_k et μ_j sont les valeurs propres de A, B et P_k et Q_j sont les projections orthogonales sur l'espace vectoriel engendré par le vecteur propre associé.

Fonctions d'opérateurs

Soient $N \in \mathbb{N}, A = A^*, B = B^* \in M_N(\mathbb{C})$. Alors

$$A = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_k \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=1}^{N} \mu_j Q_j$$

où les λ_k et μ_j sont les valeurs propres de A, B et P_k et Q_j sont les projections orthogonales sur l'espace vectoriel engendré par le vecteur propre associé.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On a

$$f(A) - f(B) = \sum_{k=1}^{N} f(\lambda_k) P_k - \sum_{j=1}^{N} f(\mu_j) Q_j$$

Fonctions d'opérateurs

Soient $N \in \mathbb{N}, A = A^*, B = B^* \in M_N(\mathbb{C})$. Alors

$$A = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_k \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=1}^{N} \mu_j Q_j$$

où les λ_k et μ_j sont les valeurs propres de A, B et P_k et Q_j sont les projections orthogonales sur l'espace vectoriel engendré par le vecteur propre associé.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} f(A) - f(B) &= \sum_{k=1}^{N} f(\lambda_k) P_k - \sum_{j=1}^{N} f(\mu_j) Q_j \\ &= \sum_{k,j=1}^{N} \frac{f(\lambda_k) - f(\mu_j)}{\lambda_k - \mu_j} \underbrace{P_k (A - B) Q_j}_{X_{k,j}} \end{aligned}$$

Fonctions d'opérateurs

Soient $N \in \mathbb{N}, A = A^*, B = B^* \in M_N(\mathbb{C})$. Alors

$$A = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_k \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=1}^{N} \mu_j Q_j$$

où les λ_k et μ_j sont les valeurs propres de A, B et P_k et Q_j sont les projections orthogonales sur l'espace vectoriel engendré par le vecteur propre associé.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} f(A) - f(B) &= \sum_{k=1}^{N} f(\lambda_k) P_k - \sum_{j=1}^{N} f(\mu_j) Q_j \\ &= \sum_{k,j=1}^{N} \frac{f(\lambda_k) - f(\mu_j)}{\lambda_k - \mu_j} \underbrace{P_k (A - B) Q_j}_{X_{k,j}} \\ \text{"} &= \text{"} \quad [f^{[1]}(\lambda_k, \mu_j)]_{k,j} \circ (A - B) \end{aligned}$$

Dimension finie : suite et fin

Théorème

Soient $N \in \mathbb{N}, A = A^*, B = B^* \in M_N(\mathbb{C})$*. On suppose que* $A = Diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$*,* $\alpha_i \in \mathbb{R}$*. Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *dérivable. Alors* $t \in \mathbb{R} \mapsto f(A + tB)$ *est dérivable et sa dérivée en* 0 *vaut*

$$[f^{[1]}(\alpha_i, \alpha_j) b_{i,j}]_{i,j} = [f^{[1]}(\alpha_i, \alpha_j)]_{i,j} \circ B$$

où $f^{[1]}(\alpha_i, \alpha_j) = \dfrac{f(\alpha_i) - f(\alpha_j)}{\alpha_i - \alpha_j}, i \neq j$*, et* $f^{[1]}(\alpha_i, \alpha_i) = f'(\alpha_i)$*.*

En dimension infinie : Soient A et B des opérateurs autoadjoints (non nécessairement bornés) et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction lipschitzienne.

En dimension infinie : Soient A et B des opérateurs autoadjoints (non nécessairement bornés) et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction lipschitzienne.

• Lorsque $A - B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on peut avoir

$$f(A) - f(B) \notin \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

(prendre $f(x) = |x|$)
Idem pour $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$.

En dimension infinie : Soient A et B des opérateurs autoadjoints (non nécessairement bornés) et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction lipschitzienne.

• Lorsque $A - B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on peut avoir

$$f(A) - f(B) \notin \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

(prendre $f(x) = |x|$)
Idem pour $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$.

• Cependant, si $1 < p < \infty$ et $A - B \in \mathcal{S}^P(\mathcal{H})$, alors

$$f(A) - f(B) \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H})$$

(D. Potapov, F. Sukochev, 2011)

En dimension infinie : Soient A et B des opérateurs autoadjoints (non nécessairement bornés) et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction lipschitzienne.

• Lorsque $A - B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on peut avoir

$$f(A) - f(B) \notin \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

(prendre $f(x) = |x|$)
Idem pour $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$.

• Cependant, si $1 < p < \infty$ et $A - B \in \mathcal{S}^P(\mathcal{H})$, alors

$$f(A) - f(B) \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H})$$

(D. Potapov, F. Sukochev, 2011)

• *Idée :* étude de $[a_{ij}] \mapsto [m_{ij} a_{ij}]$ lorsque $m_{ij} = \dfrac{f(i) - f(j)}{i - j}$.

Soit $1 < p < \infty$, soient A, K des opérateurs autoadjoints sur $\mathcal{H}$ tels que K est borné. On définit

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(A + tK) - f(A) \quad (\in \mathcal{S}^p(\mathcal{H}) \text{ if } K \in \mathcal{S}^p).$$

Dérivabilité de φ ? Dérivées d'ordres supérieurs ?

Différentiabilité de

$$A \mapsto f(A)?$$

Dérivabilité du premier ordre

• Yu. L. Daletskii et S. G. Krein (1956)
Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ et A est borné, alors φ est dérivable pour la norme d'opérateurs.

Dérivabilité du premier ordre

• Yu. L. Daletskii et S. G. Krein (1956)
Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ et A est borné, alors φ est dérivable pour la norme d'opérateurs.

• Yu. B. Farforovskaya (1976)
"$f \in C^1(\mathbb{R})$ avec une dérivée bornée" n'est pas suffisant pour assurer la dérivabilité de φ pour la norme d'opérateurs (prendre f presque égale à $|\cdot|$).

Dérivabilité du premier ordre

• Yu. L. Daletskii et S. G. Krein (1956)
Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ et A est borné, alors φ est dérivable pour la norme d'opérateurs.

• Yu. B. Farforovskaya (1976)
"$f \in C^1(\mathbb{R})$ avec une dérivée bornée" n'est pas suffisant pour assurer la dérivabilité de φ pour la norme d'opérateurs (prendre f presque égale à $|\cdot|$).

• E. Kissin, D. Potapov, V. Shulman, F. Sukochev (2012)
Si f est dérivable de dérivée bornée, alors φ est $\mathcal{S}^p$-dérivable.

Opérateurs intégraux multiples

Soient $A_i = A_i^* = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^i P_k^i \in M_N(\mathbb{C})$, $\phi : \sigma(A_1) \times \cdots \times \sigma(A_n) \to \mathbb{C}$ mesurable et bornée (*symbole*). On pose

$$\left[\Gamma^{A_1,\ldots,A_n}(\phi)\right](X_1,\ldots,X_{n-1}) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{N} \phi(\lambda_{k_1}^1,\ldots,\lambda_{k_n}^n)\; P_{k_1}^1 X_1 P_{k_2}^2 \cdots P_{k_{n-1}}^{n-1} X_{n-1} P_{k_n}^n$$

Opérateurs intégraux multiples

Soient $A_i = A_i^* = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^i P_k^i \in M_N(\mathbb{C})$, $\phi : \sigma(A_1) \times \cdots \times \sigma(A_n) \to \mathbb{C}$ mesurable et bornée (*symbole*). On pose

$$\left[\Gamma^{A_1,\ldots,A_n}(\phi)\right](X_1,\ldots,X_{n-1}) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{N} \phi(\lambda_{k_1}^1,\ldots,\lambda_{k_n}^n)\ P_{k_1}^1 X_1 P_{k_2}^2 \cdots P_{k_{n-1}}^{n-1} X_{n-1} P_{k_n}^n$$

Applications $n-1$ linéaires continues

$$\Gamma^{A_1,\ldots,A_n}(\phi) : \mathcal{S}^2(\mathcal{H}) \times \cdots \times \mathcal{S}^2(\mathcal{H}) \to \mathcal{S}^2(\mathcal{H}).$$

$\hookrightarrow$ Versions multilinéaires et continues des multiplicateurs de Schur, appelées *opérateurs intégraux multiples*.

Opérateurs intégraux multiples

Soient $A_i = A_i^* = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^i P_k^i \in M_N(\mathbb{C})$, $\phi : \sigma(A_1) \times \cdots \times \sigma(A_n) \to \mathbb{C}$ mesurable et bornée (*symbole*). On pose

$$\left[\Gamma^{A_1,\ldots,A_n}(\phi)\right](X_1,\ldots,X_{n-1}) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{N} \phi(\lambda_{k_1}^1,\ldots,\lambda_{k_n}^n)\ P_{k_1}^1 X_1 P_{k_2}^2 \cdots P_{k_{n-1}}^{n-1} X_{n-1} P_{k_n}^n$$

Applications $n-1$ linéaires continues

$$\Gamma^{A_1,\ldots,A_n}(\phi) : \mathcal{S}^2(\mathcal{H}) \times \cdots \times \mathcal{S}^2(\mathcal{H}) \to \mathcal{S}^2(\mathcal{H}).$$

$\hookrightarrow$ Versions multilinéaires et continues des multiplicateurs de Schur, appelées *opérateurs intégraux multiples*.
Par exemple , si $A - B \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$, on a

$$f(A) - f(B) = \left[\Gamma^{A,B}(f^{[1]})\right](A - B).$$

Pour quels symboles ?

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, f n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}$ bornée. On définit la différence divisée d'ordre n, $f^{[n]} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$, par récurrence avec les formules :

$$f^{[1]}(x_0, x_1) := \begin{cases} \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}, & \text{si } x_0 \neq x_1 \\ f'(x_0) & \text{si } x_0 = x_1 \end{cases}, \qquad x_0, x_1 \in \mathbb{R}.$$

Pour quels symboles ?

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, f n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}$ bornée. On définit la différence divisée d'ordre n, $f^{[n]} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$, par récurrence avec les formules :

$$f^{[1]}(x_0, x_1) := \begin{cases} \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}, & \text{si } x_0 \neq x_1 \\ f'(x_0) & \text{si } x_0 = x_1 \end{cases}, \qquad x_0, x_1 \in \mathbb{R}.$$

$$f^{[n]}(x_0, x_1, \ldots, x_n) := \begin{cases} \frac{f^{[n-1]}(x_0, x_2, \ldots, x_n) - f^{[n-1]}(x_1, x_2 \ldots, x_n)}{x_0 - x_1}, & \text{si } x_0 \neq x_1 \\ \partial_1 f^{[n-1]}(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{si } x_0 = x_1 \end{cases}.$$

Pour quels symboles ?

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, f n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}$ bornée. On définit la différence divisée d'ordre n, $f^{[n]} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$, par récurrence avec les formules :

$$f^{[1]}(x_0, x_1) := \begin{cases} \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}, & \text{si } x_0 \neq x_1 \\ f'(x_0) & \text{si } x_0 = x_1 \end{cases}, \qquad x_0, x_1 \in \mathbb{R}.$$

$$f^{[n]}(x_0, x_1, \ldots, x_n) := \begin{cases} \frac{f^{[n-1]}(x_0,x_2,\ldots,x_n)-f^{[n-1]}(x_1,x_2\ldots,x_n)}{x_0-x_1}, & \text{si } x_0 \neq x_1 \\ \partial_1 f^{[n-1]}(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{si } x_0 = x_1 \end{cases}.$$

Alors, si $1 < p < \infty$, (D. Potapov, A. Skripka, F. Sukochev, 2013)

$$\Gamma^{A_1,A_2,\ldots,A_{n+1}}(f^{[n]}) : \mathcal{S}^{pn} \times \cdots \times \mathcal{S}^{pn} \to \mathcal{S}^p$$

est bornée. Plus précisément, il existe $c_{p,n} > 0$ ne dépendant que de p et de n telle que

$$\|\Gamma^{A_1,A_2,\ldots,A_{n+1}}(f^{[n]})\|_p \leq c_{p,n}\|f^{(n)}\|_\infty.$$

Dérivées d'ordre supérieur

Théorème (C.C., C. Le Merdy, A. Skripka, F. Sukochev, 2018)

Soient A et K autoadjoints sur $\mathcal{H}$ avec $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^n(\mathbb{R})$.On suppose soit que A est borné, soit que $f^{(i)}$ est bornée pour tout $1 \leq i \leq n$. Soit

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(A + tK) - f(A) \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H}).$$

Dérivées d'ordre supérieur

Théorème (C.C., C. Le Merdy, A. Skripka, F. Sukochev, 2018)

Soient A et K autoadjoints sur $\mathcal{H}$ avec $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^n(\mathbb{R})$.On suppose soit que A est borné, soit que $f^{(i)}$ est bornée pour tout $1 \leq i \leq n$. Soit

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(A+tK) - f(A) \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H}).$$

Alors φ appartient à $C^n(\mathbb{R}, \mathcal{S}^2(\mathcal{H}))$ et pour tout entier $1 \leq k \leq n$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(t) = \left[\Gamma^{A+tK, A+tK, \ldots, A+tK}(f^{[k]})\right](K, \ldots, K).$$

Théorème (C. C., 2019)

Soient $1 < p < \infty$, A et K autoadjoints sur $\mathcal{H}$ avec $K \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H})$. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ et soit f n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que les $f^{(i)}$ sont bornées pour tout $1 \leq i \leq n$. On considère la fonction

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(A + tK) - f(A) \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H}).$$

Alors φ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $1 \leq k \leq n$, $\varphi^{(k)}$ est donné par un opérateur intégral multiple et est bornée.

Proposition

Mêmes hypothèses sur f. Soit $1 < p < \infty$, K un opérateur autoadjoint sur $\mathcal{H}$ avec $K \in \mathcal{S}^{np}(\mathcal{H})$. On note

$$R_{n,p,A,K,f} = f(A+K) - f(A) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} \Big(f(A+tK) \Big) \Big|_{t=0}.$$

Alors

$$R_{n,p,A,K,f} = \left[\Gamma^{A+K,A,\ldots,A}(f^{[n]}) \right] (K,\ldots,K), \tag{1}$$

et on a l'inégalité

$$\|R_{n,p,A,K,f}\|_p \leq c_{p,n} \|f^{(n)}\|_\infty \|K\|_{np}^n. \tag{2}$$

Proposition

Soit $1 < p < \infty$, soient A and K autoadjoints sur $\mathcal{H}$ avec $K \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H})$. Soient $n \geq 2$ et $f \in C^n(\mathbb{R})$. On suppose soit que A est borné, soit que les $f^{(i)}$ est bornée pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors la fonction

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(A + tK) - f(A) \in \mathcal{S}^p(\mathcal{H})$$

est n-fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Quid de la différentiabilité ?

Théorème (C. Le Merdy, A. Skripka, 2018)

Soit $1 < p < \infty$, soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ et soit $f \in C^n(\mathbb{R})$ telle que $f', \ldots, f^{(n)}$ sont bornées. On suppose de plus soit que $f^{(n)} \in C_0(\mathbb{R})$, soit que $f^{(n+1)}$ existe et est bornée.
Alors f est n fois continûment différentiable en tout $A = A^*$.

Outils pour les démonstrations :

- Formule

$$f(A) - f(B) = \left[\Gamma^{A,B}(f^{[1]})\right](A - B)$$

et une version similaire à l'ordre supérieur.

Outils pour les démonstrations :

- Formule
$$f(A) - f(B) = \left[\Gamma^{A,B}(f^{[1]})\right](A - B)$$
et une version similaire à l'ordre supérieur.

- Crucial : les opérateurs en jeu sont bornés.

Outils pour les démonstrations :

• Formule

$$f(A) - f(B) = \left[\Gamma^{A,B}(f^{[1]})\right](A - B)$$

et une version similaire à l'ordre supérieur.

• Crucial : les opérateurs en jeu sont bornés.
• Approximation de $f^{[n]}$ dans le cas où $f^{(n)}$ continue.
• Dans le cas où $f^{(n)}$ est seulement bornée, plus compliqué : on approxime les opérateurs...

Outils pour les démonstrations :

• Formule

$$f(A) - f(B) = \left[\Gamma^{A,B}(f^{[1]})\right](A - B)$$

et une version similaire à l'ordre supérieur.

• Crucial : les opérateurs en jeu sont bornés.
• Approximation de $f^{[n]}$ dans le cas où $f^{(n)}$ continue.
• Dans le cas où $f^{(n)}$ est seulement bornée, plus compliqué : on approxime les opérateurs...

• Continuité des dérivées : bornitude des dérivées + plusieurs types d'approximations avec quelques astuces algébriques.

Formule de trace

Les éléments de $S^1(\mathcal{H})$ ont un "trace", comme pour une matrice finie.

Supposons que f est opérateur-Lipschitz i.e.

$$f(A+K) - f(A) \in S^1(\mathcal{H})$$

pour tout $A = A^*$ et tout $K = K^* \in S^1(\mathcal{H})$.
Ceci implique que $f'(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que f' est bornée.

Formule de trace

Les éléments de $S^1(\mathcal{H})$ ont un "trace", comme pour une matrice finie.

Supposons que f est opérateur-Lipschitz i.e.

$$f(A+K) - f(A) \in S^1(\mathcal{H})$$

pour tout $A = A^*$ et tout $K = K^* \in S^1(\mathcal{H})$.
Ceci implique que $f'(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que f' est bornée.

Soient $A = A^*$ et $K = K^* \in S^1(\mathcal{H})$. Alors (Krein, 1953 et V. Peller, 2016) il existe $\xi \in L^1(\mathbb{R})$ (ne dépendant que de A et K) telle que

$$\mathrm{Tr}(f(A+K) - f(A)) = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\xi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Formule de trace

Les éléments de $S^1(\mathcal{H})$ ont un "trace", comme pour une matrice finie.

Supposons que f est opérateur-Lipschitz i.e.

$$f(A+K) - f(A) \in S^1(\mathcal{H})$$

pour tout $A = A^*$ et tout $K = K^* \in S^1(\mathcal{H})$.
Ceci implique que $f'(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que f' est bornée.

Soient $A = A^*$ et $K = K^* \in S^1(\mathcal{H})$. Alors (Krein, 1953 et V. Peller, 2016) il existe $\xi \in L^1(\mathbb{R})$ (ne dépendant que de A et K) telle que

$$\mathrm{Tr}(f(A+K) - f(A)) = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\xi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par exemple, si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Tr}((A+K-\alpha I)^{-1} - (A-\alpha I)^{-1}) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t-\alpha)^2}\xi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Supposons maintenant que $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$ et que $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec f', f'' bornées.

Supposons maintenant que $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$ et que $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec f', f'' bornées.
Alors

$$f(A+K) - f(A) - \frac{d}{dt} f(A+tK)_{|t=0} = \left[\Gamma^{A+K,A,A}(f^{[2]})\right](K,K)$$

Supposons maintenant que $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$ et que $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec f', f'' bornées.
Alors

$$f(A+K) - f(A) - \frac{d}{dt} f(A+tK)_{|t=0} = \left[\Gamma^{A+K,A,A}(f^{[2]})\right](K,K)$$

n'est pas toujours un élément de $S^1(\mathcal{H})$!

Supposons maintenant que $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$ et que $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec f', f'' bornées.
Alors

$$f(A+K) - f(A) - \frac{d}{dt} f(A+tK)_{|t=0} = \left[\Gamma^{A+K,A,A}(f^{[2]})\right](K,K)$$

n'est pas toujours un élément de $S^1(\mathcal{H})$!

Comment garantir que $f(A+K) - f(A) - \dfrac{d}{dt} f(A+tK)_{|t=0} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$?

Supposons maintenant que $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$ et que $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec f', f'' bornées.
Alors

$$f(A+K) - f(A) - \frac{d}{dt} f(A+tK)_{|t=0} = \left[\Gamma^{A+K,A,A}(f^{[2]})\right](K,K)$$

n'est pas toujours un élément de $S^1(\mathcal{H})$!

Comment garantir que $f(A+K) - f(A) - \dfrac{d}{dt} f(A+tK)_{|t=0} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$?

(C. C., C. Le Merdy, F. Sukochev, 2017) Supposons qu'il existe un espace de Hilbert séparable $\mathcal{K}$ et deux fonctions boréliennes bornées $a, b : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{K}$ telles que

$$f^{[2]}(s,t,u) = \langle a(s,t), b(t,u) \rangle \,, \quad \forall (s,t,u) \in \mathbb{R}^3.$$

Supposons maintenant que $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$ et que $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec f', f'' bornées.
Alors

$$f(A+K) - f(A) - \frac{d}{dt} f(A+tK)_{|t=0} = \left[\Gamma^{A+K,A,A}(f^{[2]}) \right] (K,K)$$

n'est pas toujours un élément de $S^1(\mathcal{H})$!

Comment garantir que $f(A+K) - f(A) - \dfrac{d}{dt} f(A+tK)_{|t=0} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$?

(C. C., C. Le Merdy, F. Sukochev, 2017) Supposons qu'il existe un espace de Hilbert séparable $\mathcal{K}$ et deux fonctions boréliennes bornées $a, b : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{K}$ telles que

$$f^{[2]}(s,t,u) = \langle a(s,t), b(t,u) \rangle , \quad \forall (s,t,u) \in \mathbb{R}^3.$$

Alors $f(A+K) - f(A) - \dfrac{d}{dt} f(A+tK)_{|t=0} \in S^1(\mathcal{H})$!

Théorème (C.C, C. Le Merdy, A. Skripka, F. Sukochev, 2018)

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que f'' est bornée.. Supposons qu'il existe un espace de Hilbert séparable $\mathcal{K}$ et deux fonctions boréliennes bornées $a, b : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{K}$ tels que

$$f^{[2]}(s,t,u) = \langle a(s,t), b(t,u) \rangle\,, \quad \forall (s,t,u) \in \mathbb{R}^3.$$

Soient $A, K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjoints avec $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$.

Théorème (C.C, C. Le Merdy, A. Skripka, F. Sukochev, 2018)

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que f'' est bornée.. Supposons qu'il existe un espace de Hilbert séparable $\mathcal{K}$ et deux fonctions boréliennes bornées $a, b : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{K}$ tels que

$$f^{[2]}(s,t,u) = \langle a(s,t), b(t,u) \rangle\,, \quad \forall (s,t,u) \in \mathbb{R}^3.$$

Soient $A, K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjoints avec $K \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$.
Alors il existe $\eta \in L^1(\mathbb{R})$ ("fonction de Koplienko") telle que

$$Tr\Big(f(A+K) - f(A) - \frac{d}{dt} f(A+tK)_{|t=0} \Big) = \int_{\mathbb{R}} f''(t)\eta(t)\,dt.$$

Quelles fonctions $f \in C^2(\mathbb{R})$ sont telles que $f^{[2]}$ satisfait la propriété de factorisation précédente ?

Quelles fonctions $f \in C^2(\mathbb{R})$ sont telles que $f^{[2]}$ satisfait la propriété de factorisation précédente ?

$\rightsquigarrow$ Par exemple $f(x) = \dfrac{1}{(x-\alpha)^k}, k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Quelles fonctions $f \in C^2(\mathbb{R})$ sont telles que $f^{[2]}$ satisfait la propriété de factorisation précédente ?

$\rightsquigarrow$ Par exemple $f(x) = \dfrac{1}{(x-\alpha)^k}, k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $f^{[2]} \in C_b(\mathbb{R}) \otimes C_b(\mathbb{R}) \otimes C_b(\mathbb{R})$.

Quelles fonctions $f \in C^2(\mathbb{R})$ sont telles que $f^{[2]}$ satisfait la propriété de factorisation précédente ?

$\rightsquigarrow$ Par exemple $f(x) = \dfrac{1}{(x-\alpha)^k}, k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $f^{[2]} \in C_b(\mathbb{R}) \otimes C_b(\mathbb{R}) \otimes C_b(\mathbb{R})$.

$\rightsquigarrow$ Les fonctions dans la classe de Besov $f \in B^2_{\infty,1}(\mathbb{R})$.

Quelles fonctions $f \in C^2(\mathbb{R})$ sont telles que $f^{[2]}$ satisfait la propriété de factorisation précédente ?

$\rightsquigarrow$ Par exemple $f(x) = \dfrac{1}{(x-\alpha)^k}, k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $f^{[2]} \in C_b(\mathbb{R}) \otimes C_b(\mathbb{R}) \otimes C_b(\mathbb{R})$.

$\rightsquigarrow$ Les fonctions dans la classe de Besov $f \in B^2_{\infty,1}(\mathbb{R})$.

Ce résultat est-il optimal ?

Merci de votre attention !