A la découverte de l'infini

Clément Coine, Marine Rougnant

Journée de découverte de la recherche mathématique,
26 novembre 2014

1. UN INFINI PEUT EN CACHER UN AUTRE
   - Comment comparer deux ensembles ?
   - L'hôtel (infini !) de Hilbert

2. COMMENT ADDITIONNER UNE INFINITÉ DE NOMBRES ?
   - Le paradoxe de Zénon
   - Comment calmer la soif des mathématiciens ?

Comment comparer deux ensembles finis ?

Comment comparer deux ensembles finis ?

. . . En comptant leurs éléments !

Comment comparer deux ensembles finis ?
. . . En comptant leurs éléments !

Et si on ne sait pas compter ?

Comment comparer deux ensembles finis ?
. . . En comptant leurs éléments !

Et si on ne sait pas compter ?
On essaie d'apparier les éléments du premier ensemble et les éléments du second.

Comment comparer deux ensembles finis ?
... En comptant leurs éléments !

Et si on ne sait pas compter ?
On essaie d'apparier les éléments du premier ensemble et les éléments du second.

Définition

Une application f d'un ensemble A dans un ensemble B est une bijection si pour tout élément y de B, il existe un unique élément x dans A tel que $f(x) = y$.

Comment comparer deux ensembles infinis ?

Comment comparer deux ensembles infinis ?

. . . En construisant une bijection entre ces deux ensembles !

Comment comparer deux ensembles infinis ?
. . . En construisant une bijection entre ces deux ensembles !

Connaissez-vous des ensembles infinis ?

Comment comparer deux ensembles infinis ?
. . . En construisant une bijection entre ces deux ensembles !

Connaissez-vous des ensembles infinis ?

Ont-ils tous la même taille ?

Comment comparer deux ensembles infinis ?
. . . En construisant une bijection entre ces deux ensembles !

Connaissez-vous des ensembles infinis ?

Ont-ils tous la même taille ?

On a donc montré que $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$ avaient la même "taille" que $\mathbb{N}$.

Définition

*Un ensemble qu'on peut mettre en bijection avec $\mathbb{N}$ est dit **dénombrable**, c'est-à-dire qu'on peut énumérer ses éléments.*

• **Remarque :** on peut montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable...et que $\mathbb{R}$ ne l'est pas !

L'hôtel de Hilbert, ou hôtel infini de Hilbert, est une image attribuée au mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) qui illustre plusieurs propriétés surprenantes des ensembles infinis.

L'hôtel de Hilbert, ou hôtel infini de Hilbert, est une image attribuée au mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) qui illustre plusieurs propriétés surprenantes des ensembles infinis.

En particulier : *une partie d'un ensemble, différente du tout, peut avoir "la même taille" que le tout.*

Autrement dit : elle a autant d'éléments, même s'il en manque...

L'hôtel de Hilbert, ou hôtel infini de Hilbert, est une image attribuée au mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) qui illustre plusieurs propriétés surprenantes des ensembles infinis.

En particulier : *une partie d'un ensemble, différente du tout, peut avoir "la même taille" que le tout.*

Autrement dit : elle a autant d'éléments, même s'il en manque...

Imaginons donc qu'un hôtel (fictif !), tenu par Mr Hilbert, possède une infinité de chambres numérotées par les entiers naturels (par $\mathbb{N}^*$ en fait) : 1,2,3,4,5,6,7,....

Tous les soirs l'hôtel est plein : chaque chambre est occupée par exactement un client.

Tous les soirs l'hôtel est plein : chaque chambre est occupée par exactement un client.

Chaque soir de nouveaux clients arrivent, à la recherche d'une chambre. La situation semble sans espoir !

Tous les soirs l'hôtel est plein : chaque chambre est occupée par exactement un client.

Chaque soir de nouveaux clients arrivent, à la recherche d'une chambre. La situation semble sans espoir !

Malgré tout, Mr Hilbert essaye de leur trouver une chambre. Bien entendu, à la fin de l'opération, chaque ancien client doit encore avoir une chambre et être seul dans sa chambre.

Tous les soirs l'hôtel est plein : chaque chambre est occupée par exactement un client.

Chaque soir de nouveaux clients arrivent, à la recherche d'une chambre. La situation semble sans espoir !

Malgré tout, Mr Hilbert essaye de leur trouver une chambre. Bien entendu, à la fin de l'opération, chaque ancien client doit encore avoir une chambre et être seul dans sa chambre.

Dans chacun des cas suivants, pouvez vous dire si Hilbert va s'en sortir et si oui... comment ?

1. Le premier soir : un nouveau client se présente.

2. Le deuxième soir : 2014 clients se présentent.

3. Le troisième soir : un bus (infini !) de nouveaux clients se gare devant l'hôtel. De ce bus sort une infinité (dénombrable) de clients, chacun portant un t-shirt numéroté : 1,2,3, . . .

4. Le quatrième soir : une infinité (dénombrable) de bus se garent devant l'hôtel (en fait le parking de l'hôtel infini est un parking infini, c'est la moindre des choses). Les bus sont numérotés 1,2,3,4,5,6,7,8... De chaque bus sort une infinité (dénombrable) de clients.
   Pour être sûrs de ne pas perdre leurs clients, les organisateurs leur font porter un T-shirt sur lequel figure deux numéros : le premier est celui de leur bus et le second est celui de leur place dans ce bus.

1. Un infini peut en cacher un autre
   - Comment comparer deux ensembles ?
   - L'hôtel (infini !) de Hilbert

2. Comment additionner une infinité de nombres ?
   - Le paradoxe de Zénon
   - Comment calmer la soif des mathématiciens ?

Un lièvre fait la course avec une tortue. Le lièvre court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Un lièvre fait la course avec une tortue. Le lièvre court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Mais le lièvre laisse 100 m d'avance à la tortue au départ.

Un lièvre fait la course avec une tortue. Le lièvre court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Mais le lièvre laisse 100 m d'avance à la tortue au départ.

Pendant que celui-ci parcourt ses 100 m de retard, la tortue s'éloigne de 10 m.

Un lièvre fait la course avec une tortue. Le lièvre court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Mais le lièvre laisse 100 m d'avance à la tortue au départ.

Pendant que celui-ci parcourt ses 100 m de retard, la tortue s'éloigne de 10 m.

Puis, le lièvre parcourt les 10 m qui lui manquent, pendant que la tortue s'éloigne de 1m.... et ainsi de suite...

Un lièvre fait la course avec une tortue. Le lièvre court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Mais le lièvre laisse 100 m d'avance à la tortue au départ.

Pendant que celui-ci parcourt ses 100 m de retard, la tortue s'éloigne de 10 m.

Puis, le lièvre parcourt les 10 m qui lui manquent, pendant que la tortue s'éloigne de 1m.... et ainsi de suite...

Conclusion : le lièvre ne rattrape jamais la tortue ! Cherchez l'erreur !

Le lièvre rattrape bien la tortue :

Notons $f(t)$ et $g(t)$ les positions respectives du lièvre et de la tortue à l'instant t.

Le lièvre rattrape bien la tortue :

Notons $f(t)$ et $g(t)$ les positions respectives du lièvre et de la tortue à l'instant t.
On convient que la ligne de départ correspond à la position 0. On a donc $f(0) = 0$ et $g(0) = 100$.

Le lièvre rattrape bien la tortue :

Notons $f(t)$ et $g(t)$ les positions respectives du lièvre et de la tortue à l'instant t.
On convient que la ligne de départ correspond à la position 0. On a donc $f(0) = 0$ et $g(0) = 100$.
Par hypothèse, on a alors

$$f(t) = 10t \quad \text{et} \quad g(t) = 100 + t.$$

Le lièvre rattrape bien la tortue :

Notons $f(t)$ et $g(t)$ les positions respectives du lièvre et de la tortue à l'instant t.
On convient que la ligne de départ correspond à la position 0. On a donc $f(0) = 0$ et $g(0) = 100$.
Par hypothèse, on a alors

$$f(t) = 10t \quad \text{et} \quad g(t) = 100 + t.$$

Résolvons f (t) = g(t)...Facile !

Le lièvre rattrape bien la tortue :

Notons $f(t)$ et $g(t)$ les positions respectives du lièvre et de la tortue à l'instant t.
On convient que la ligne de départ correspond à la position 0. On a donc $f(0) = 0$ et $g(0) = 100$.
Par hypothèse, on a alors

$$f(t) = 10t \quad \text{et} \quad g(t) = 100 + t.$$

Résolvons f (t) = g(t)...Facile !
$$10t = 100 + t \Leftrightarrow 9t = 100 \Leftrightarrow t = \frac{100}{9} = 11,1111\ldots.$$

Le lièvre rattrape bien la tortue :

Notons $f(t)$ et $g(t)$ les positions respectives du lièvre et de la tortue à l'instant t.
On convient que la ligne de départ correspond à la position 0. On a donc $f(0) = 0$ et $g(0) = 100$.
Par hypothèse, on a alors

$$f(t) = 10t \quad \text{et} \quad g(t) = 100 + t.$$

Résolvons f (t) = g(t)...Facile !
$10t = 100 + t \Leftrightarrow 9t = 100 \Leftrightarrow t = \dfrac{100}{9} = 11,1111\ldots.$

Conclusion : le lièvre rattrape la tortue ...Ouf !

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :

Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10$.

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :
Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 11$.

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :
Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 11$.
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\right) = 11,1$.

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :
Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 11$.
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\right) = 11,1$.
- n étapes :

$$t_n = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :
Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10.$
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 11.$
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\right) = 11,1.$
- n étapes :

$$t_n = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = 10\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{10^k}$$

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :
Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10.$
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 11.$
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\right) = 11,1.$
- n étapes :

$$t_n = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = 10\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{10^k} \quad = 10\frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}}$$

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :
Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10.$
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 11.$
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\right) = 11,1.$
- n étapes :

$$t_n = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = 10\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{10^k} = 10\frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}}$$
$$= \frac{100}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :
Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 11$.
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\right) = 11,1$.
- n étapes :

$$t_n = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = 10\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{10^k} \quad = 10\frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

La suite $(t_n)_n$ tend vers $\frac{100}{9}$!

Une infinité (dénombrable) de mathématiciens entre dans un bar.

Une infinité (dénombrable) de mathématiciens entre dans un bar.

Le barman : "Qu'est-ce que je vous sers ?"

Une infinité (dénombrable) de mathématiciens entre dans un bar.

Le barman : "Qu'est-ce que je vous sers ?"
Mathématicien 1 : "Je vais prendre un coca."

Une infinité (dénombrable) de mathématiciens entre dans un bar.

Le barman : "Qu'est-ce que je vous sers ?"
Mathématicien 1 : "Je vais prendre un coca."
Mathématicien 2 : "Un demi coca pour moi."

Une infinité (dénombrable) de mathématiciens entre dans un bar.

Le barman : "Qu'est-ce que je vous sers ?"
Mathématicien 1 : "Je vais prendre un coca."
Mathématicien 2 : "Un demi coca pour moi."
Mathématicien 3 : "Et pour moi un quart de coca."

Une infinité (dénombrable) de mathématiciens entre dans un bar.

Le barman : "Qu'est-ce que je vous sers ?"
Mathématicien 1 : "Je vais prendre un coca."
Mathématicien 2 : "Un demi coca pour moi."
Mathématicien 3 : "Et pour moi un quart de coca."
Mathématicien 4 : "Pour moi ce sera un huitième de coca."

Une infinité (dénombrable) de mathématiciens entre dans un bar.

Le barman : "Qu'est-ce que je vous sers ?"
Mathématicien 1 : "Je vais prendre un coca."
Mathématicien 2 : "Un demi coca pour moi."
Mathématicien 3 : "Et pour moi un quart de coca."
Mathématicien 4 : "Pour moi ce sera un huitième de coca."

$\vdots$

Une infinité (dénombrable) de mathématiciens entre dans un bar.

Le barman : "Qu'est-ce que je vous sers ?"
Mathématicien 1 : "Je vais prendre un coca."
Mathématicien 2 : "Un demi coca pour moi."
Mathématicien 3 : "Et pour moi un quart de coca."
Mathématicien 4 : "Pour moi ce sera un huitième de coca."
$\vdots$
Le barman : "C'est bon j'ai compris ! Je vous apporte deux canettes !"